

L'OSILLATEUR HARMONIQUE

A l'occasion du problème fondamental de l'étude de l'oscillateur harmonique, nous résumons ci-dessous les méthodes générales applicables aux systèmes linéaires.

1 L'oscillateur libre non amorti

Les exemples typiques sont , en mécanique : masse + ressort , en électricité : "auto-inductance+condensateur", d'équations différentielles respectives :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

Forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{Avec } \omega_o^2 = \frac{k}{m} (= \frac{1}{LC})$$

Résolution , formalisme opérationnel ($d/dt \rightarrow p$)

$$p^2 X + \omega_o^2 X = 0 \rightarrow (p^2 + \omega_o^2) X = 0$$

Equation caractéristique (X non identiquement nul) et solution générale :

$$p^2 + \omega_o^2 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \pm j\omega_o$$

$$x(t) = A' \exp(j\omega_o t) + B' \exp(-j\omega_o t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t) = a \cos(\omega_o t - \varphi)$$

La première solution est exprimée "naturellement" à l'aide d'exponentielles complexes (racines imaginaires conjuguées), la dernière est limitée à x réel (A et B : constantes d'intégration réelles).

Notons que le formalisme complexe (que nous retrouverons lors de l'étude d'un oscillateur forcé en régime sinusoïdal) associe à $x(t)$ une "image complexe" de la forme :

$$\underline{x} = \underline{X} \times \exp(j\omega_o t) \quad \text{avec } x(t) = \text{Re}(\underline{x})$$

Exercice 1

1) Montrer que l'amplitude complexe \underline{X} est de la forme :

$$\underline{X} = a \times \exp(-j\varphi) = A + jB$$

2) Justifier que le passage $(A, B) \Leftrightarrow (a, \varphi)$ revient à un passage cartésien \Leftrightarrow polaire.

3) A.N. Soit une masse $m = 200 \text{ g}$ accroché à un ressort de raideur $k = 5 \text{ N.m}^{-1}$

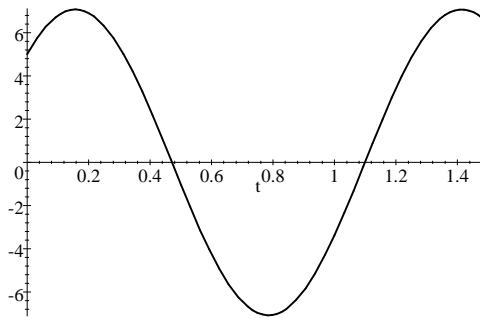
A l'instant initial on donne : $x(0) = 5 \text{ cm}$; $v(0) = 25 \text{ cm.s}^{-1}$, calculer $x(t)$, l'amplitude et la période des oscillations. Calculer à quel instant t_1 , $x(t)$ est maximum pour la première fois.

Réponses :

$$A = a \times \cos(\varphi) = x(0); B = a \times \sin(\varphi) = \frac{v(0)}{\omega_o}$$

$$A = B = 5 \text{ cm}; a = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ cm}, \varphi = \pi/4 = 45^\circ$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 1,257 \text{ s}; t_1 = \frac{\pi}{4\omega_o} = 0,157 \text{ s}$$



$$5 * \sqrt{2} * (\cos(5 * t - \pi/4))$$

On remarque que l'amplitude complexe est une constante (dans le temps) dépendant des conditions initiales.

Son module représente l'amplitude ordinaire du mouvement.

Son argument, représente la phase à l'origine et vaut $-\varphi$

Aspect énergétique

L'oscillateur non amorti possède une énergie totale constante composée de deux termes. Un terme potentiel (ou électrique) fonction de la position x (ou de la charge q) :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{ou} \quad E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Un terme cinétique (ou magnétique) fonction de la vitesse $v = dx/dt$ (ou du courant $i = dq/dt$)

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{ou} \quad E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

Exercice :

- Vérifier que l'on retrouve l'équ diff du mouvement en exprimant la conservation de l'énergie, cad en annulant la dérivée de l'énergie totale par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt}(E_p + E_c) = 0$$

- Vérifier que l'énergie oscille entre les deux formes à une fréquence $2\omega_0$ et qu'en **moyenne** chaque forme d'énergie emporte la moitié de l'énergie totale.

- Vérifier que l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude "ordinaire", soit au carré du module de l'amplitude complexe

$$E_p + E_c = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} k|X|^2 = \frac{1}{2} k(X \times X^*)$$

2 Oscillateur libre amorti

Les exemples typiques sont , en mécanique système masse + ressort+amortissement visqueux , en électricité le circuit R,L,C série :, d'équations différentielles respectives :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Forme canonique 1 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_o \frac{dx}{dt} + \omega_o^2x = 0$$

Introduisant un nouveau coefficient : le **facteur d'amortissement** ζ (lettre grecque dzeta) , **damping ratio** en anglais.

La pulsation ω_o restant la pulsation propre du système non amorti, a priori différente de la pulsation propre du système amorti.

Pour les systèmes mécanique et électrique on a respectivement :

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}} \quad \text{ou} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Forme canonique 2 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q_o} \frac{dx}{dt} + \omega_o^2x = 0$$

Introduisant le facteur de qualité Q_o , appelé aussi facteur de surtension en électricité (cf régime sinusoïdal). On a de manière évidente :

$$Q_o = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_o m}{\lambda} = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda} \text{ (méca)} ; Q_o = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ (électricité)}$$

Un facteur de qualité élevé correspond ainsi à un système peu amorti

Attention : une autre définition du facteur de qualité est utilisée en mécanique...

Equation caractéristique , racines :

$$p^2 + 2\zeta\omega_o p + \omega_o^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \omega_o \times \left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right]$$

Nous allons nous intéresser tout particulièrement à l'oscillateur faiblement amorti : $\zeta < 1$ ($Q_o > 1/2$), les racines sont alors complexes conjuguées. On sait qu'au niveau des solutions, la partie réelle négative correspond à un amortissement exponentiel des oscillations dont la pulsation est donnée par la partie imaginaire, soit :

$$x = \exp(-\zeta\omega_o t) \times [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = a \exp(-\zeta\omega_o t) \times \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\omega = \omega_o \sqrt{1 - \zeta^2}$$

On introduit parfois la constante de temps τ , associée à une troisième forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_o^2x = 0 \rightarrow \tau = \frac{Q_o}{\omega_o} = \frac{1}{2\zeta\omega_o}$$

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \times [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = a \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \times \cos(\omega t - \varphi)$$

Comme pour l'oscillateur non amorti, les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des CI. On a toujours $A = x(0)$, la détermination rigoureuse de B est plus délicate puisqu'il faut dériver un produit de deux fonctions du temps.

Pour un oscillateur faiblement amorti, on peut considérer que l'exponentielle a une dérivée négligeable devant celle du cosinus, et que la pulsation reste sensiblement égale à ω_o .

Décroissant logarithmique

Définition et expressions selon la notation employée :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

$$\delta = \zeta \times \omega_o T = 2\pi \zeta \times \frac{\omega_o}{\omega} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta = \frac{\pi}{Q_o} \frac{1}{\sqrt{1-1/4Q_o^2}} \text{ puisque } \zeta = \frac{1}{2Q_o}$$

$$\delta = \frac{T}{2\tau} \text{ puisque } \zeta \times \omega_o = \frac{1}{2\tau}$$

Aspect énergétique

A présent, l'énergie mécanique totale diminue au cours du temps. Dans l'équation différentielle du mouvement, le terme du premier ordre est un terme dissipatif qui absorbe continuellement de l'énergie. En effet, la puissance "fournie" par la force dissipative est négative selon :

$$P = F_f \circ v = -\lambda v^2 \text{ (oscillateur mécanique)}$$

$$P = -U_R \circ i = -Ri^2 \text{ (circuit RLC)}$$

$$P = \frac{dE}{dt} < 0$$

Le signe - qui apparaît dans l'expression électrique (et non dans l'expression mécanique) provient de la convention récepteur qui revient à mesurer "positivement" une chute de tension dans un dipôle passif.

En **moyenne**, l'énergie mécanique totale reste proportionnelle au carré de "l'amplitude instantanée" :

$$a(t) = a_o \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \rightarrow$$

$$E_m(t) \approx a^2(t) = a_o^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La constante de temps τ constitue ainsi un temps caractéristique de décroissance de l'énergie.

L'énergie mécanique effective a l'instant t , subit des fluctuations dues au fait que la dissipation (proportionnelle à v^2) n'volue pas de manière régulière. (Voir le graphe associé à l'exercice qui suit)

Il est toujours possible de relier l'énergie perdue sur **une période** au décrement logarithmique.

$$\frac{E_m(t)}{E_m(t+T)} = \exp\left(+\frac{T}{\tau}\right) \rightarrow \ln \frac{E_m(t)}{E_m(t+T)} = \frac{T}{\tau} =$$

Pour un système faiblement amorti, une période est une "petite" variation. On applique alors les règles du calcul différentiel :

$$E = k \times y^2 \rightarrow \frac{dE}{E} = 2 \times \frac{dy}{y} = 2 \times d(\ln(y)) = -2 \times \delta$$

L'énergie relative perdue (ou encore pourcentage perdu) sur une période (assimilable à $-dE/E$) vaut deux fois le décrement logarithmique.

Exercice 1

On ajoute à l'oscillateur précédent ($m = 200 \text{ g}$; $k = 5 \text{ N.m}^{-1}$) un amortissement visqueux : $F_f = -\lambda v$ avec $\lambda = 0.2 \text{ N.s.m}^{-1}$

On conserve les mêmes conditions initiales.

Calculer les valeurs des divers paramètres mesurant l'amortissement : ζ, Q_o, τ ainsi que la

pulsation ω . Donner l'équation complète du mouvement $x(t)$ en déterminant les constantes d'intégration $\{A, B\}$ ou $\{a, \varphi\}$

Calculer le décrétement logarithmique.

Calculer l'énergie mécanique initiale, puis sa valeur en $T = 2\pi/\omega$

Exercice 2

On dispose d'une "grosse" inductance : $L = 10H$, calculer les valeurs de la capacité et de la résistance associées permettant d'obtenir un oscillateur électrique analogue au système mécanique ci-dessus.

Réponses Exercice1

$$\zeta = 0,1, Q_o = 5, \tau = 1s, \omega = 4,975 \text{ rd.s}^{-1}, T = 1,263s$$

$$A = 5 \text{ cm}; B = 5,528 \text{ cm}$$

$$a_o = 7,453 \text{ cm}; \varphi = -0,8355 \text{ rad}$$

$$x(t) = \exp(-0.5 * t) * (5 * \cos(4.975 * t) + 5.528 * \sin(4.975 * t))$$

$$x(t) = 7,453 * \exp(-0.5 * t) * \cos(4.975 * t - 0.8355)$$

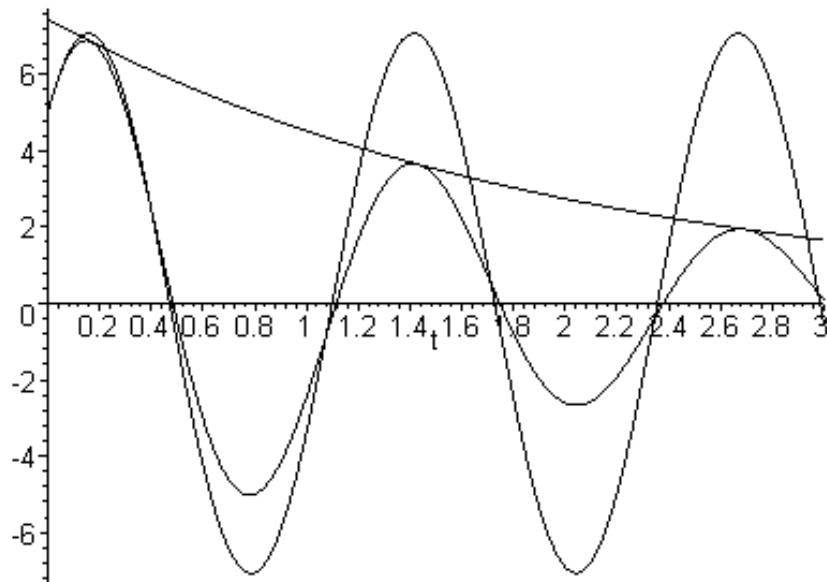
$$\delta = 0,6315$$

$$E_o = \frac{kx_o^2}{2} + \frac{mv_o^2}{2} = 12,5 \text{ mJ}$$

$$E(T) = E(1,263s) = 6,65 \text{ mJ}$$

La perte d'énergie par période est trop importante pour que l'on puisse faire l'approximation proposée avec le décrétement logarithmique. Néanmoins, on constate que la pulsation varie peu $\omega \approx \omega_o$ et que les constantes d'intégration sont peu différentes de celles de l'oscillateur non amorti.

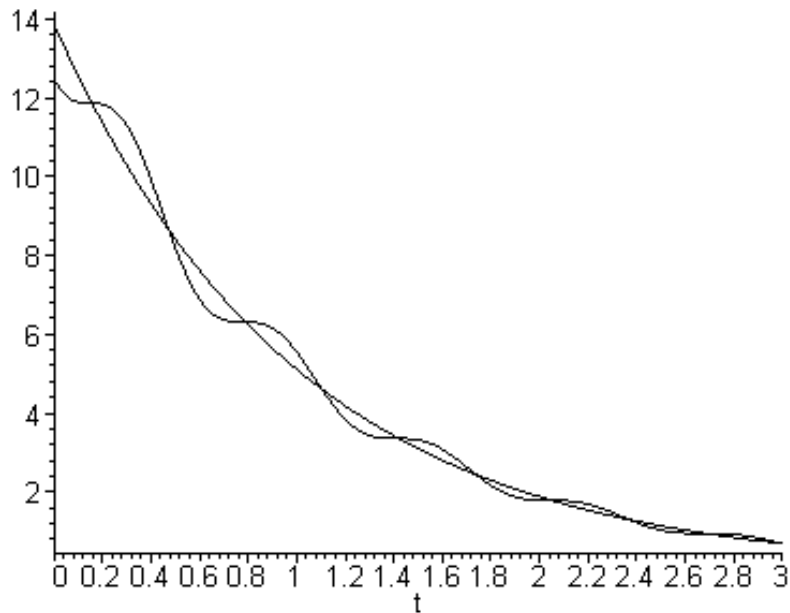
Sur le graphe (ordonnées en cm) on a représenté : l'oscillateur non amorti, l'oscillateur amorti, ainsi que l'amplitude "instantanée" $a(t) = a_o \times \exp(-t/2\tau)$



Sur ce second graphe on présente (en mJ), l'évolution de l'énergie mécanique totale E_m , ainsi que celle de l'énergie mécanique moyenne :

$$E_m = E_p(x^2) + E_c(v^2)$$

$$E_{mm} = a_o \times \exp(-t/\tau)$$



Que remarquez-vous aux instants où $E_m = E_{mm}$?

Réponses Exercice 2

$$C = 4 \text{ mF}; R = 10 \Omega$$

3 Oscillateur amorti en régime sinusoïdal

Formalisme

Nous étudions maintenant un oscillateur, non plus en régime "libre" mais en régime sinusoïdal forcé. Dans le cas mécanique, l'oscillateur est soumis à une force du type :

$$F = F_o \times \cos(\Omega t)$$

Dans le cas électrique, le circuit est alimenté par la tension ("force" électro-motrice) :

$$E = E_o \times \cos(\Omega t)$$

L'analyse mathématique nous dit alors qu'il faut ajouter à la solution associée à l'oscillateur libre une solution "particulière" associée au régime forcé. Ici il s'agit d'un régime sinusoïdal établi. Le système étant linéaire permanent (dipôles linéaires, a caractéristiques constantes dans le temps), cette solution particulière sera "forcément" une solution sinusoïdale de même pulsation que la force excitatrice, d'expression(s) :

$$x = A \times \cos(\Omega t) + B \times \sin(\Omega t) = a \times \cos(\Omega t - \varphi)$$

Ces expressions ressemblent très fort à celles associées à l'oscillateur libre non amorti. Il ne faut surtout pas les confondre ! La pulsation Ω n'a a priori rien à voir avec la pulsation propre ω_o ou ω . Par ailleurs les constantes, en particulier amplitude a et retard de phase φ ne dépendent pas des conditions initiales (nous sommes en régime établi "longtemps après" l'instant initial) mais bien de l'excitation Ω . Leurs graphes en fonction de Ω constituent l'analyse harmonique (courbes de Bode par exemple).

Le formalisme adapté à la recherche des grandeurs $\{A, B\}$ ou $\{a, \varphi\}$ est le formalisme complexe dont nous rappelons les règles :

- a une grandeur sinusoïdale de la forme : $s = a \times \cos(\Omega t + \theta)$

on associe la grandeur complexe : $\underline{s} = a \exp(j\theta) \times \exp(j\Omega t) = \underline{a} \times \exp(j\Omega t)$

dans laquelle l'amplitude complexe $a \exp(i\theta)$ contient l'information complète (amplitude et phase).

- l'équation différentielle du système " forcé" est remplacée par une équation linéaire reliant grandeur d'entrée (excitation) et grandeur de sortie (réponse du système) dans laquelle formellement $d/dt \rightarrow j\Omega \times$; $\int dt \rightarrow 1/(j\Omega)$

Application

Appliquons ce formalisme au circuit RLC série alimenté par une fem sinusoïdale :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E_o \times \cos(\Omega t)$$

$$\left(j\Omega L + R + \frac{1}{j\Omega C} \right) I = E_o \times \exp(j\Omega t)$$

La grandeur de sortie, courant i circulant dans le circuit , a ainsi une amplitude complexe :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{j\Omega L + R + 1/j\Omega C} = \frac{E_o}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Z}(\Omega) = j\Omega L + R + 1/j\Omega C = R + j \times (\Omega L - 1/\Omega C)$$

où \underline{Z} est l'impédance complexe du circuit

On parle de transfert complexe entre une grandeur d'entrée (fem appliquée) et une grandeur de sortie (courant en régime sinusoïdal établi) selon :

$$\underline{I} = \underline{H} \times \underline{E} \text{ avec ici } \underline{H} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Ainsi l'amplitude "ordinaire" du courant vaut :

$$I_m(\Omega) = \frac{E_o}{|\underline{Z}|} = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/\Omega C)^2}}$$

$$\varphi(\Omega) = \text{Arg}(\underline{Z}) = \text{Arc tan} \left(\frac{R}{\Omega L - 1/\Omega C} \right)$$

$$i(t, \Omega) = I_m(\Omega) \times \cos(\Omega t - \varphi(\Omega))$$

Comme dans l'étude de l'oscillateur libre, c'est le retard de phase de la sortie sur l'entrée qui est reliée à une grandeur caractéristique du circuit, son impédance, apparaissant au dénominateur de la fonction de transfert.

Résonance en courant

La résonance en courant (électricité) est analogue à la résonance en vitesse (mécanique). Il est facile de voir que cette résonance existe (présence d'un maximum d'amplitude d'intensité) quel que soit le facteur d'amortissement, cad que le régime libre soit oscillatoire amorti ou non. Le calcul de ce maximum ne nécessite aucunement un calcul fastidieux de dérivée. D'après l'allure du transfert complexe, il est facile de voir que cette résonance se produit pour un module de \underline{Z} minimum . Or \underline{Z} possède une partie réelle constante et une partie imaginaire de signe variable selon Ω , il est donc évident que son module est minimum pour :

$$\text{Im}(\underline{Z}) := \Omega L - 1/\Omega C = 0 \rightarrow \Omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$$

$$I_m(\Omega_r) = \frac{E_o}{R} \text{ amplitude du courant à la résonance}$$

La résonance en courant d'un oscillateur amorti se produit à la pulsation propre de l'oscillateur non amorti associé.

Notons que si l'oscillateur est lui-même non amorti ($R = 0$), cette résonance est infinie. Ce

cas n'est évidemment pas acceptable physiquement pour au moins deux raisons : les hypothèses de linéarité sont mise en défaut pour de fortes amplitudes, par ailleurs on n'obtient jamais de régime sinusoïdal établi, le régime "transitoire" devenant lui-même infiniment long !

Diagrammes de Bode

Gain (réduit) en décibel

$$G_{dB} = 20 \times \log_{10} \frac{\|H\|(\Omega)}{|H|(\Omega_r)} = 20 \times \log_{10} \frac{I_m(\Omega)}{I_m(\Omega_r)} \leq 0$$

Déphasage (sortie- entrée)

$$\Phi = \text{Arg}(H) = -\text{Arg}(Z)$$

Ces diagrammes étant présentés en fonction du log de la pulsation Ω ou de la pulsation réduite $\Omega^* = \Omega/\Omega_r$ (ce qui se réduit à une simple translation).

Application

Tracer à la calculatrice ou à l'ordinateur ces graphes pour le circuit RLC du chapitre précédent ($R = 10\Omega$; $L = 10H$; $C = 4mF$). On prendra soin de réécrire la fonction de transfert réduite $H^* = H/H(\Omega_r)$ en fonction de la pulsation réduite $x = \Omega/\Omega_r$, en faisant apparaître le facteur d'amortissement ζ ou le facteur de qualité Q_o

Réponses

$$H^* = \frac{1}{1 + jQ_o(x - 1/x)}$$

$$G_{dB} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2(x - 1/x)^2}}$$

$$-\Phi = \varphi = \arctan\left(\frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R}\right) = \arctan\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)Q_o\right)$$

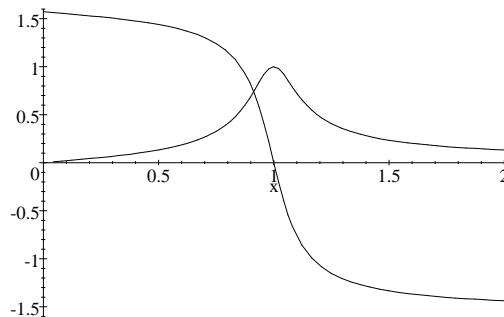
$$\Omega = x\omega_o \text{ avec } \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_o RC} = Q_o = \frac{1}{2\zeta}$$

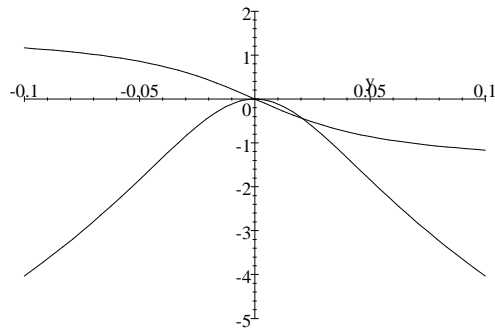
On remarque que le paramètre Q_o est particulièrement bien adapté à ces expressions

Traçons les graphes en fonction de x puis en fonction de $\log_{10}x$

$$G = (1 + 25 * (x - 1/x)^2)^{(-.5)}$$

$$\Phi = -\arctan\left(\left(x - \frac{1}{x}\right) * 5\right)$$





Dans le dernier graphe ($\log(x)$ en abscisse) on se concentre au voisinage de la résonance (pic à - 3 dB)

Bande passante à - 3 dB

Justification du choix $G_{dB} = -3dB$

D'après la définition, les limites de la bande passante correspondent à une atténuation **en amplitude** de :

$$\frac{a}{a_{Max}} = 10^{(3/20)} \approx \sqrt{2}$$

Soit d'une atténuation **en puissance** :

$$\frac{P}{P_{Max}} = \left(\frac{a}{a_{Max}} \right)^2 = 10^{(3/10)} \approx 2$$

L'atténuation en amplitude concerne le module du transfert complexe :

$$\frac{a}{a_{Max}} = \frac{|H|}{|H_{Max}|}$$

Dans le cas fréquent, où le transfert complexe se présente selon :

$$H = \frac{H_o}{R + j \times I(\omega)}$$

avec comme seule variable la partie imaginaire du dénominateur, alors le maximum ($\omega = \omega_r$) est obtenu pour $I(\omega_r) = 0$ et les bords de la bande passante correspondent à :

$$I(\omega) = \pm R$$

Si nous reprenons l'expression du transfert réduit, on obtient le critère :

$$H^* = \frac{1}{1 + jQ_o(x - 1/x)} \rightarrow (x - 1/x) = \pm \frac{1}{Q_o}$$

Application

- 1) Calculer les bornes de la bande passante pour le circuit RLC étudié précédemment ($R = 10\Omega, L = 10H, C = 4mF$)
- 2) Ce circuit est alimenté sous la fem :

$$E = E_o \cos(\Omega t) \text{ avec } E_o = 10V; \Omega = 4,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

Exprimer le courant en régime sinusoïdal établi sous la forme :

$$I = I_o \cos(\Omega t - \theta)$$

3) Le circuit étant initialement "au repos" : courant nul et condensateur déchargé ; donner la **solution complète** $I(t)$ lorsque l'on applique à partir de $t = 0$, la tension ci-dessus. Préciser quel dipôle "supporte" la tension en $t = 0^+$

Réponses

$$1) \omega_1 = 4,525 \text{ rad.s}^{-1} ; \omega_2 = 4,525 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{on vérifie : } \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \omega_o = 5 \text{ rad.s}^{-1}$$

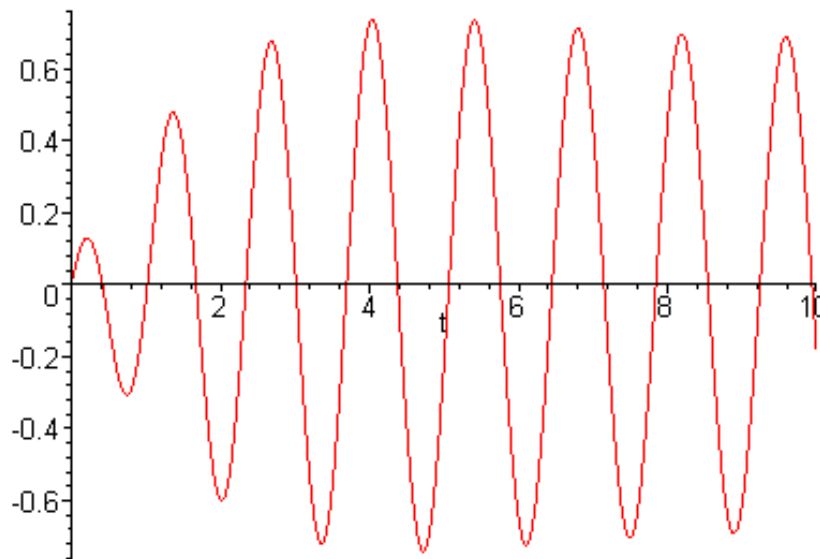
$$2) I_o = \frac{E_o}{|Z(\Omega)|} = 688 \text{ mA}$$

$$\theta = \text{Arg}(Z) = -0,812 \text{ rad} = -46^\circ 5' \text{ (circuit capacitif)}$$

$$i(t) = 0,688 \times \cos(5t + 0,812) \text{ avec } i \text{ en A et } t \text{ en sec}$$

Le circuit étant capacitif ($\Omega < \omega_o$) le courant est en avance sur la tension.

3) Graphe de $i(t)$ mettant en évidence la phase "transitoire" de mise en régime sinusoïdal (assez calculatoire et heureusement rarement demandé). On remarque un léger dépassement d'amplitude vers $t = 4$ s : la fréquence forcée étant assez proche de la résonance.



Etablissons la solution complète pour le courant $i(t)$, analogue à la vitesse $v(t)$ de l'oscillateur mécanique. Cette solution est la somme de la solution de l'équ diff homogène (sans second membre) et de l'équ particulière avec second membre soit :

$$i(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \times (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + I_o \cos(\Omega t - \theta)$$

La forme de la solution homogène étant absolument identique à celle obtenue pour $x(t)$!

La difficulté (calculatoire) revenant à calculer les constantes A et B à partir des conditions initiales.

La continuité de tension aux bornes de L impose $i(0^+) = 0$ Dès lors, c'est la "self" qui supporte toute la tension en $t = 0^+$, ce qui entraîne

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E_o}{L} = 1 \text{ A.s}^{-1}$$

Après calculs, la solution complète s'écrit numériquement (i en A, t en sec) :

$$i(t) = \exp(-1/2 * t) * (0,605 * \sin(4,975 * t) - 0,4734 * \cos(4,975 * t)) + 0,688 * \cos(4,5 * t + 0,812)$$

4 Filtres divers

Le cas du circuit RLC série nous permet de passer en revue les trois types de filtres du second ordre : passe-bas, passe-bande et passe-haut. Avec toutefois une nuance par rapport aux filtres du premier ordre qui est la possibilité de résonance de tous ces filtres au voisinage de la fréquence propre de l'oscillateur.

Transfert " normalisé"

Nous venons de voir que le transfert tension appliquée -> courant dans le circuit RLC série est caractéristique d'un passe-bande.

En pratique, si l'on mesure des tensions, ce transfert est associé à la tension de sortie mesurée aux bornes de la résistance selon :

$$\underline{H}_R(\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_T} = \frac{R}{\underline{Z}} = \frac{R}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + jQ_o(\omega/\omega_o - \omega_o/\omega)}$$

Cette forme, pratique pour déterminer les caractéristiques de la bande passante, n'est pas "normalisée".

Si l'on revient à la variable de Laplace $p = j\omega$, la forme normalisée est un quotient de deux polynômes en p :

$$H_R(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{pRC}{p^2LC + pRC + 1}$$

Cette forme permet de revenir facilement à une relation temporelle entre l'entrée et la sortie sous forme différentielle ($p \rightarrow d/dt$)

$$\frac{S}{E} = \frac{N}{D} \rightarrow D \times S = N \times E$$

$$\left(LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) s(t) = RC \frac{d}{dt} e(t)$$

Cette forme permet de voir qu'asymptotiquement il ne s'agit ni d'un passe-bas ($p \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow 0$) ni d'un passe-haut ($p \rightarrow \infty \Rightarrow H \rightarrow 0$).

Passe-bas : tension de sortie aux bornes du condensateur

On établit facilement :

$$H_C(p) = \frac{Z_C(p)}{Z_T(p)} = \frac{H_R(p)}{pCR} = \frac{1}{p^2LC + pRC + 1}$$

Il s'agit bien d'un passe-bas ($p \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow 1$) avec une pente de -40 dB/décade en HF : $p \rightarrow \infty \Rightarrow H \rightarrow 1/(p^2LC)$

Il peut néanmoins exister une résonance en moyenne fréquence lui donnant également une allure de passe-bande.

C'est en particulier le cas dans l'exemple du circuit RLC étudié précédemment.

Noter que le calcul de la résonance (gain maximum) est moins évident que pour la résonance en intensité puisqu'en analyse harmonique ($p \rightarrow j\omega$) le dénominateur complexe présente une partie réelle Et une partie imaginaire fonctions de la fréquence.

Exercice

Réécrire le transfert harmonique ($p \rightarrow j\omega$), en faisant apparaître la pulsation réduite $x = \omega/\omega_o$ et le facteur de qualité Q_o

Préciser alors la fréquence du maximum en tension aux bornes de C.

Montrer que pour $\omega = \omega_o$ la tension aux bornes de C est égale à Q_o fois la tension d'entrée (

Q_o est donc appelé facteur de surtension : phénomène d'amplification souvent utile, parfois dangereux...)

Réponses

$$H_C(x) = \frac{1}{(1-x^2) + jx/Q_o} \quad \text{on a utilisé } \omega_o RC = \frac{1}{Q_o}$$

La résonance se situe au minimum de la fonction f de $u = x^2$

$$f(u) = (1-u)^2 + \frac{u}{Q_o}$$

$$f' = 0 \rightarrow u_o = 1 - \frac{1}{2Q_o^2} \quad \text{existe ssi } Q_o > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pour l'application au circuit RLC, on mesure alors un gain maxi $G_{\max} = 5,025$ (amplitude aux bornes de C sur amplitude d'entrée) pour $\omega = 0,99 \omega_o$. Résultat très proche du gain pour $\omega = \omega_o$: $G(\omega_o) = Q_o = 5,00$

Passé-haut : tension de sortie aux bornes de la bobine (idéale)

On établit facilement (diviseur de tension) :

$$H_L(p) = \frac{Z_L(p)}{Z_T(p)} = \frac{pL}{pL + R + 1/pC} = \frac{1}{1 + R/pL + 1/(p^2LC)}$$

Il s'agit bien d'un passé-haut ($p \rightarrow \infty \Rightarrow H \rightarrow 1$) avec une pente de $+40 \text{ dB/décade}$ en BF : $p \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow p^2LC$

Il peut néanmoins exister une résonance en moyenne fréquence lui donnant également une allure de passe-bande.

C'est à nouveau le cas dans l'exemple du circuit RLC étudié précédemment.

Exercice

Faire une analyse analogue à l'étude précédente. Vérifier en particulier que la résonance stricte aux bornes de L ne se situe pas exactement en ω_o mais que pour un circuit faiblement amorti comme celui étudié elle en est très proche. Justifier que l'on retrouve le facteur de surtension égal à Q_o

Réponses

$$H_L(x) = \frac{1}{(1-1/x^2) + 1/(jxQ_o)} \quad \text{on a utilisé : } \frac{\omega_o L}{R} = Q_o$$

La résonance se situe au minimum de la fonction f de $u = 1/x^2$

$$f(u) = (1-u)^2 + \frac{u}{Q_o}$$

La fonction est la même que celle étudiée au § précédent, le résultat est donc formellement identique. Mais attention, la variable u n'est plus la même. Notons que sur un diagramme logarithmique, une symétrie parfaite apparaît puisque :

$$\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2)$$

Pour l'application au circuit RLC, on mesure alors un gain maxi $G_{\max} = 5,025$ (amplitude de tension aux bornes de L sur amplitude d'entrée) pour $\omega = 1,01 \omega_o$. Résultat très proche du gain pour $\omega = \omega_o$: $G(\omega_o) = Q_o = 5,00$

Les maxima de tension aux bornes de L ou de C encadrent donc celui aux bornes de R.