Référentiel en rotation uniforme - exercices

On étudie des problèmes de statique ou de dynamique dans un référentiel relatif en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen. On étudie d'abord des problèmes de mécanique du point puis des problèmes de mécanique des milieux continus : solide ou gaz.

Lemme : force centrifuge dans un référentiel en rotation uniforme

Dans un tel référentiel, on doit introduire la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge)

$$\vec{F}_{ie} = -m \times \vec{a}_e = +m\Omega^2 r \vec{u}_r$$

Où r représente la distance de la masse (ponctuelle) étudiée à l'axe de rotation, et $\vec{u}_r = \overrightarrow{Grad}(r)$: vecteur unité orienté dans le sens des r croissant.

Cette force dérive de l'énergie potentielle centrifuge :

$$E_{pc}(r) = -\frac{m\Omega^2 r^2}{2}$$

Dans les problèmes de statique relative, c'est la seule force d'inertie à considérer.

1 Equilibre d'un pendule conique

Un pendule simple, pesant (poids $m\vec{g}$, fil inextensible de longueur ℓ, est accroché en O à un axe vertical Oz mis en rotation $\vec{\Omega}$ autour de lui-même).

Préciser le ou les angles θ d'équilibre relatif en fonction de Ω.

Rép.:

On travaille dans un repère cylindrique tournant, d'axe z vertical :

$\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$; $\vec{g} = (0, 0, -g)$

Introduisons l'énergie potentielle totale (pesanteur + force centrifuge) :

$$E_p = m\left(gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) = -m[g\ell\cos(\theta) + \frac{\Omega^2\ell^2}{2}\sin^2(\theta)]$$

Dérivons deux fois cette expression :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mg\ell[\sin(\theta) - \mu\sin(\theta)\cos(\theta)] \qquad \text{avec } \mu = \frac{\Omega^2\ell}{g} = \frac{\Omega^2}{\omega_o^2} = \Omega^{*2}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mg\ell(\cos(\theta) - \mu\cos(2\theta))$$

On a introduit la pulsation propre du pendule simple ω_o et la pulsation réduite Ω^* :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ ; } \Omega^* = \frac{\Omega}{\omega_o}$$

Ainsi que la relation bien connue :

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Les positions d'équilibre correspondent à des extrema d'energie potentielle

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$1°)\,\sin(\theta) = 0 \to \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

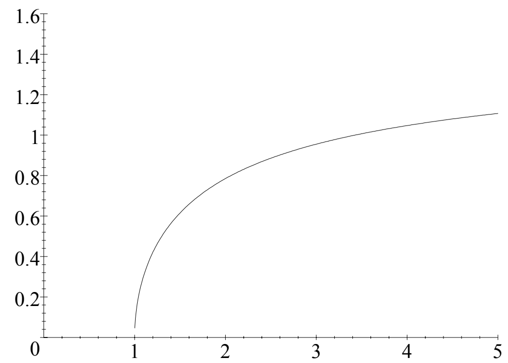
$$2°)\,\cos(\theta) = \frac{1}{\mu} \to \theta = \arccos(1/\mu) = \arccos(\frac{g}{\ell \times \Omega^2}) = \arccos(\frac{1}{\Omega^*})^2$$

Les deux premières solutions existent toujours, la dernière seulement pour $\Omega > \omega_o$ soit $\Omega^* > 1$ (pulsation réduite)

On vérifie que la solution $\theta = \pi$ est toujours instable, alors que la solution $\theta = 0$ stable à faible vitesse de rotation devient instable lorsque la troisième solution devient possible.

Ce problème illustre le phénomène de "bifurcation" brutale de l'équilibre.

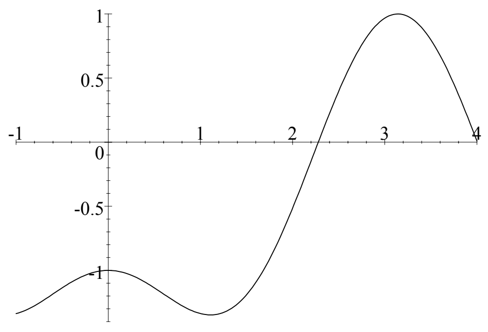
Graphe $\theta = f(\Omega^*)$:



On remarque que dès que le pendule "décolle" de la position verticale, l'angle θ_e croît rapidement (dérivée $\to \infty$)

Traçons l'énergie potentielle (réduite) , en fonction de θ, pour $\Omega^* = 1,5$ afin de mettre en évidence équilibre stable et instable.

$$E_p^* = \frac{E_p}{mg\ell} = -[\cos(\theta) + \frac{\Omega^{*2}}{2}\sin^2(\theta)] \quad = -\left[\cos(\theta) + 1.125 \times \sin^2(\theta)\right]$$



On visualise bien les équilibres instables en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (maxima locaux d'énergie potentielle) et l'équilibre stable en

$$\theta = \arccos(\frac{1}{\Omega^*})^2 = \arccos(\frac{1}{2,25}) = 1,11\,rad = 63,6°$$

Refaites le graphe dans le cas $\Omega^* = 1$ ou encore $\Omega^* < 1$.

Conclusion

On remarque la supériorité du raisonnement énergétique par rapport au raisonnement classique à partir des forces $\left(\sum \vec{F} = 0\right)$

On n'introduit pas l'inconnue tension du fil et on possède immédiatement un critère de stabilité. Vérifier néanmoins la compatibilité des résultats avec cette seconde approche.

2 Pendule conique "élastique"

Le fil inextensible du problème précédent est remplacé par un ressort de longueur au repos ℓ_o et de raideur k.

Reprendre la discussion de l'équilibre avec cette fois deux inconnues $\ell(\Omega)$ et $\theta(\Omega)$

Réponse.:

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$E_p(\theta,\ell) = -mg\ell\cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\ell-\ell_o)^2 - m\frac{\Omega^2\ell^2}{2}\sin^2(\theta)$$

L'équilibre impose les deux conditions :

$$\frac{\partial E_p^*}{\partial \ell} = \frac{\partial E_p^*}{\partial \theta} = 0$$

La dérivation par rapport à θ reproduit la discussion précédente, (puisque la dérivée partielle par rapport à θ se calcule à ℓ fixée : fil inextensible)

Il faut maintenant déterminer ℓ.

Examinons de plus près la seule solution intéressante, en $\cos(\theta) = (g/\ell\Omega)^2$ qui existe pour $\Omega^2 > g/\ell$.

La dérivation par rapport à ℓ impose alors :

$$\ell = \frac{\ell_o}{1-m\Omega^2/k} = \frac{\ell_o}{1-(\Omega/\omega_1)^2} \qquad \text{avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cette solution implique :

$$\Omega < \omega_1$$

sinon le ressort s'allonge indéfiniment (rupture), la solution en $\ell < 0$ étant inaceptable physiquement

Par ailleurs on doit avoir :

$$\Omega^2 > g/\ell \Rightarrow \Omega^2 > \frac{\omega_o^2 \times \omega_1^2}{\omega_o^2+\omega_1^2} \text{ avec } \omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell_o}} ; \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega > \Omega_{\min} = \frac{\omega_o \times \omega_1}{\sqrt{\omega_o^2+\omega_1^2}}$$

Conclusion :

$$\Omega_{\min} < \Omega < \omega_1 \Rightarrow \cos(\theta_{équil}) = \frac{g}{\ell \times \Omega^2} = \omega_o^2\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)$$

$$\Omega < \Omega_{\min} \Rightarrow \theta_{équil} = 0$$

$$\Omega > \omega_1 \Rightarrow \text{ rupture}$$

3 Mouvement relatif d'un point pesant lié

Soit $Oxyz$ un repère "absolu" (galiléen) avec Oz vertical tel que $\vec{g} = (0, 0, -g)$ et $OXyZ$ un repère "relatif" en rotation relative uniforme autour de l'axe horizontal $Oy \equiv OY$. Soit $\vec{\Omega} = (0, \Omega, 0)$, angle $xOX = \theta(t) = \Omega t$

Considérons un point matériel P pesant ($m\vec{g}$)astreint à rester sur l'axe OXpar une liaison polie (anneau glissant sans frottement). En $t = 0$, on a $X(P) = X_o$ et $dX(P)/dt = V_o$ (vitesse initiale dans le réf. tournant)

En écrivant le principe fondamental dans le référentiel tournant déterminer la loi du mouvement relatif $X(t)$. Donner l'expression de la réaction de liaison normale N. Pour quelles conditions initiales particulières le mouvement relatif est-il une oscillation pure ? Quelle est alors la trajectoire absolue ?

Lemme Force d'inertie de Coriolis

Dans ce problème, il y a mouvement relatif et donc force d'inertie de Coriolis, d'expression :

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

Notons, que contrairement à la force d'inertie d'entraînement , il n'y a pas lieu de lui associer une énergie potentielle puisque son travail dans le réf. tournant est toujours nul :

$$\delta W_c = \vec{F}_{ic} \circ \vec{d\ell} = -2m\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r\right) \circ \vec{V}_r dt = 0$$

Réponses.:

Projetons sur les axes relatifs X et Y, le PDF :

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dV_r}{dt}\right) &= m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} \\ \vec{R} &= N\vec{u}_Y \text{ (réaction sans frottement)} \\ m\frac{d^2X}{dt^2} &= -mg\sin(\Omega t) + m\Omega^2 X \\ m\frac{d^2Y}{dt^2} &= 0 = -mg\cos(\Omega t) + N - 2m\Omega\frac{dX}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(t) &= Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \frac{g}{2\Omega^2}\sin(\Omega t) \\ X(t) &= X_o ch(\Omega t) + \frac{V_o - g/2\Omega}{\Omega} sh(\Omega t) + \frac{g}{2\Omega^2}\sin(\Omega t) \text{ d'après les C.I.} \end{aligned}$$

La trajectoire sera purement sinusoïdale ssi :

$$X_o = 0 \text{ et } V_o = g/2\Omega \Rightarrow X(t) = \frac{V_o}{\Omega}\sin(\Omega t)$$

La trajectoire absolue sera alors :

$$x(t) = \frac{V_o}{2\Omega}\sin(2\Omega t) \qquad z(t) = \frac{V_o}{2\Omega}(1 - \cos(2\Omega t))$$

C'est une circonférence de centre $(0, V_o/2\Omega)$, de rayon $a = V_o/2\Omega$ parcourue uniformément.

La réaction normale se calcule par la projection sur Y du PFD.

Dans le cas du mouvement sinusoïdal, on a simplement :

$$N = 2mg\cos(\Omega t)$$

4. Equilibre d'un câble "spatial"

inspiré par le projet de Bradley Edwards

ainsi que par le sujet CCP 2005 : "**Ascenseur spatial**" voir énoncé complet sur le site physbaggio.com

On considère dans ce problème l'équilibre d'un câble "spatial" vertical dont la base est en un point du sol sur l'équateur. On utilise la variable r : distance au centre de la Terre. Sa masse linéique est notée μ (supposée constante dans un premier temps).

Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation par rapport au référentiel galiléen géocentrique (un tour en un jour sidéral). La pesanteur traduit dès lors la somme de deux forces :

- L'attraction gravitationnelle dirigée vers le centre de la Terre
- La force d'inertie d'entraînement (force centrifuge).

1) Exprimer l'intensité de la pesanteur $g(r)$ en fonction des données suivantes :

$R_T = 6380\,km$ rayon de la Terrre, supposée sphérique

$G \times M_T = GE = 3{,}98.10^{14} m^3.s^{-2}$ Cste géocentrique de la gravitation (produit de G par la masse de la Terre)

$\Omega = 7{,}29.10^{-5} rad.s^{-1}$ vitesse de rotation de la Terre

2) Calculer la valeur r_o du rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

3) En étudiant l'équilibre d'un tronçon élémentaire de câble de masse $dm = \mu \times dr$, exprimer la dérivée de la tension au sein du câble $dT/dr\,(= Grad(T))$

4) En considérant la tension nulle au sol (en fait une légère tension est nécessaire pour éviter que le câble ne s'effondre), exprimer la tension en fonction de r. En quelle point cette tension passe-t-elle par un maximum. Calculer la longueur de câble nécessaire pour obtenir qu'il tienne en l'air "tout seul". On simplifiera les expressions en introduisant des variables réduites :

$$r^* = \frac{r}{r_o}\ ;\ T^* = \frac{T}{T_o} \text{ avec } T_o = \mu \times (r_o\Omega)^2$$

5) En fait cette longueur est prohibitive et la tension maximale énorme en pratique. Suggérez des aménagements possibles "en pratique"

4)

Réponses

1)

$$g(r) = \frac{GE}{r^2} - \Omega^2 r$$

et se mesure en $N.kg^{-1}$ ou en $m.s^{-2}$

On reconnaît un terme positif de gravitation et un terme négatif d'inertie centrifuge. Attention au signe : le signe de g est opposé à celui de la force radiale correspondante.

2) La pesanteur s'annule en r_o

$$g(r_o) = \frac{GM}{r_o^2} - \Omega^2 r_o = 0 \to r_o = \left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{1/3} = 4{,}2164.10^7\,m = 42\,164\,kms$$

3) Exprimons que la somme des forces s'annulent : tensions aux extrémités (r et r+dr) , poids du tronçon (Attention aux signes)

$$0 = T(r+dr) - T(r) + \mu \times dr\left(r\Omega^2 - \frac{GM}{r^2}\right) = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = \mu \times \left(\frac{GM}{r^2} - r\Omega^2\right) \rightarrow \frac{dT^*}{dr^*} = \left(\frac{1}{r^{*2}} - r^*\right)$$

4)

$$\text{Posons } f(u) = \frac{1}{u} + \frac{u^2}{2}$$

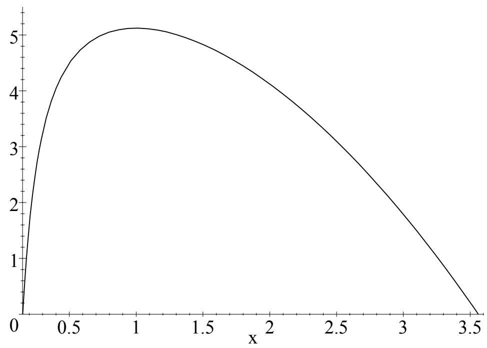
$$\text{Alors} \quad : \quad T^* = f(R_T/r_o) - f(r/r_o)$$

A.N.: $R_T/r_o = 0,1513$

Sa faible valeur est cause de la grande difficulté de réalisation du projet : il faut s'élever énormément pour que la force centrifuge devienne d'un secours appréciable !

Graphe de la tension réduite

$$T^*(r^*) = 6,622 - \frac{1}{r^*} - \frac{r^{*2}}{2}$$



Pour que le câble tienne "tout seul", il faut que sa tension redevienne nulle à son extrémité supérieure.

On trouve (résolution numérique)

$$r_1^* = 3.561 \text{ soit } R_1 = 3.561 \times 42\,164\, kms = 150\,150\, km\,!!$$

Une solution intéressante pour réduite la longueur du câble est de le terminer par une masse M_{top} créant par son poids (négatif) localisé la tension nécessaire. On suppose ici la tension au sol nulle.

5 Fluide en rotation

Inspiré du sujet **Mines-Ponts MP 2005 Tensions et compressions dans des corps en rotation**

(p 57 , p05mm1)

Soit un cylindre d'axe z vertical, hauteur H, rayon a, en rotation uniforme autour de son axe : $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$

Celui-ci contient un fluide de masse volumique μ entraîné dans son mouvement.

Bilan statique (volumique, vectoriel)

$$-\overrightarrow{Grad}(P) + \mu\Omega^2 r \vec{u}_r + \mu\vec{g} = 0$$

On reconnaît l'expression des trois forces : *pression*, *inertie* (*centrifuge*) *et poids*.

En particulier, en l'absence de rotation on retrouve l'équation de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{Grad}(P) = \mu\vec{g} \to \frac{dP}{dz} = -\mu g$$

rencontrée lors de l'étude de l'équilibre d'un liquide incompressible ou d'un gaz parfait (atmosphère)

1) Lorsque le récipient est mis en rotation, justifier que la surface libre (P = Patm) soit un paraboloïde de révolution.

2) On considère maintenant une centrifugeuse, dans ce cas on néglige le poids : $\Omega^2 R \gg g$, l'équ diff radiale s'écrit :

$$\frac{dP}{dr} = \mu\Omega^2 r$$

Ainsi, en coordonnées cylindriques, la seule variable r est pertinente :

- Symétrie de révolution $\to \partial/\partial\varphi = 0$
- Poids négligé $\to \partial/\partial z = 0$

Dans le cas d'un liquide ($\mu = Cste$) cette équation s'intègre facilement

Considérons plutôt un gaz parfait d'équation d'état (forme locale, variables intensives) :

$$\mu(T,P) = \frac{R}{M} \times \frac{T}{P} \text{ avec } M : \text{ masse molaire.}$$

On suppose dorénavant que la température T est uniforme.

Montrer que l'équation différentielle, après séparation des variables s'écrit :

$$\frac{dP}{P} = \frac{2rdr}{D^2}$$

où l'on introduit une distance caractéristique du problème D.

Intégrer cette relation pour obtenir P(r).

Déterminer la constante d'intégration (pression $P(0)$ sur l'axe) à l'aide de la conservation de la matière.

Réponses

$$\frac{dP}{P} = \frac{2rdr}{D^2} \text{ avec } D^2 = 2\frac{RT}{M\Omega^2}$$

$$\ln\frac{P(r)}{P(0)} = \left(\frac{r}{D}\right)^2$$

La pression sur l'axe $P(0)$, cad la "constante d'intégration" du point de vue mathématique se détermine par la conservation de la matière en fonction de P_o pression au repos.

En effet

$$P(r) = K \times \mu(r) \text{ avec } K = \frac{RT}{M} \text{ et } T = Cste$$

Donc

$$\mu(r) = \mu(0) \times \exp\left(\frac{r}{D}\right)^2 = \frac{dM}{d\tau}$$

Où $\mu(0)$ est la masse volumique sur l'axe, à déterminer grâce à la **Conservation de la masse totale** M_T :

$$M_T = \int \mu(r)\, d\tau \quad \text{on prend : } d\tau = 2\pi rHdr$$

$$M_T = \int_0^a \mu(0) \times \exp\left(\frac{r}{D}\right)^2 2\pi rHdr$$

$$M_T = \mu_o \times \pi a^2 H \text{ (immédiat en fonction de } \mu_o \text{ uniforme)}$$

$$\to \mu(0) = \frac{\mu_o \times \pi R^2 H}{\int_0^a \exp(r/D)^2 2\pi rHdr}$$

En faisant le changement de variable : $(r/D)^2 = u \to du = 2rdr/D^2$, on trouve facilement :

$$\mu(0) = \mu_o \times \frac{U}{\exp(U) - 1} \quad \text{avec } U = (a/D)^2 = \frac{M\Omega^2}{2RT}a^2$$

Le résultat est analogue pour $P(0)$.Finalement :

$$P(r) = P_o \times \frac{U}{\exp(U) - 1}\exp(u) \text{ avec } u = (r/D)^2 = \frac{M\Omega^2}{2RT}r^2$$

La pression reste sensiblement constante si :

$$a \ll D = \sqrt{2\frac{RT}{M\Omega^2}}$$

C'est-à-dire pour une rotation "faible", telle que la vitesse d'entraînement ($V_e = M\Omega^2 r^2$)reste petite devant la vitesse d'agitation thermique. On montre en effet que la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique vaut :

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

On peut également comparer à la vitesse du son qui est du même ordre de grandeur :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$