Notion de grandeur moyenne

0 Introduction

La notion de moyenne est omniprésente en science :

- **Mécanique** : centre de masse, moment d'inertie, quantité de mouvement, énergie cinétique,...
- **Electricité** : courant moyen, courant efficace, puissance active
- **Statistique** : moyenne, écart-type, variance
- **Thermodynamique** : notions cinétiques de pression, de température, d'énergie interne

La recherche d'une moyenne est en pratique un excellent moyen de passer d'une somme discrète (moyenne des notes sur les DS de l'année) à une somme "continue" : centre de masse d'une tige, d'une plaque, d'un cône... permettant de rendre plus naturel et plus concret le passage entre les symboles : Σ, $\int$, $\iint$, $\iiint$

A nouveau, nous commencerons par étudier des exemples géométriques qui nous permettront de nous familiariser avec les méthodes générales.

1 Distance moyenne à un point fixé

Considérons un point O de l'espace et un domaine D "accessible". On veut calculer la distance moyenne entre ce point O et un point M pris "au hasard" sur le domaine.

1.1. Circonférence et disque

Si le domaine est une **circonférence de centre O et de rayon R**, la réponse est immédiate !

Par définition de la circonférence, tous les points sont à même distance du centre et l'on admet facilement le résultat :

La moyenne d'une grandeur constante vaut cette constante

Mathématiquement nous écrirons :

$$\langle OM \rangle_{circonférence} = R$$

Si maintenant, le domaine est l'ensemble du **disque** de centre O et de rayon R la réponse est moins immédiate. On pourrait prendre N points "au hasard" sur le disque, notés M_i $(i = 1, 2, ...N)$, et estimer la moyenne par :

$$\langle OM \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} OM_i$$

On pourrait imaginer de construire un programme informatique réalisant ce calcul, à l'aide d'un générateur aléatoire de coordonnées, et vérifier que pour un nombre de plus en plus élevé de points, le résultat converge vers la "bonne" valeur.

Pour résoudre ce problème mathématiquement, nous allons découper le disque en surfaces élémentaires, (infinitésimales),telles que tous les points de cette surface soient à même distance de O et calculer :

$$\langle OM \rangle = \frac{1}{\Sigma(dS_i)} \sum OM_i dS_i$$

En effet, il est naturel de considérer que le nombre de points contenus dans dS_i est proportionnel à dS_i

La somme des dS_i est bien sûr égale à l'aire du disque, on peut écrire :

$$\Sigma(dS_i) = S = \pi R^2$$

Une façon "probalistique" de dire les choses, est de considérer que l'on associé au point M_i la probabilité élémentaires $dp_i = dS_i/S$ d'être tiré "au hasard" et de définir la distance moyenne selon :

$$\langle OM \rangle = \Sigma OM_i dp_i$$

Les sommes étant en fait "continues" et non "discrètes" on écrit finalement :

$$\langle OM \rangle = \frac{\int OM \times dS}{\int dS}$$

L'explication cruciale du passage d'une somme discrète à une somme continue (*intégrale*) *est sûrement perfectible...*

Précisons le choix de l'expression de dS dans le cas précis du disque.

La surface doit être élémentaire, mais ne doit pas forcément être quasi-ponctuelle ! La contrainte est que l'ensemble des points de dS soit "quasi" à même distance du centre. On choisit donc une "quasi" circonférence de rayon r ($0 \le r \le R$) et d'épaisseur élémentaire dr. Nous retrouvons le raisonnement du chapitre "**du linéaire au quadratique**" (2 du périmètre à la surface du cercle)

Ainsi $OM = r$ (à dr près, négligeable...) et donc :

$$\langle OM \rangle = \frac{\int_0^R r \times 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{\int_0^R r^2 dr}{\int_0^R r dr} = \frac{R^3/3}{R^2/2} = \frac{2}{3}R$$

On remarque qu'il n'est pas indispensable d'expliciter ici la surface du disque :
$S = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2$

1.2. Le carré (filiforme)

Si nous considérons maintenant un carré de centre O et de demi-côté a, la recherche de la distance moyenne entre le centre et un point M appartenant à la frontière du carré (au bord) est moins triviale au niveau du calcul. Néanmoins la méthode reste la même, les "techniques d'intégration" sont en principe bien connues au niveau du programme de math. C'est l'occasion de vous tester. Si vous avez besoin d'aide, voici quelques points importants du raisonnement.

1.On choisit un repère adapté au problème : repère cartésien Oxy, d'axes parallèles au côtés du carré

2. Par raison de symétrie, on peut limiter la recherche de moyenne à 1/8 du périmètre, soit à l'ensemble des points M appartenant au segment AB de coordonnées respectives $(a,0)$; (a,a)

soit $\overrightarrow{OM} = (a,y)$ avec $0 \le y \le a$

3. La distance au centre se calcule par "Pythagore" $OM = \sqrt{a^2 + y^2}$

4. Le découpage du segment se fait en segments élémentaires de taille dy

5. L'expression de la distance moyenne s'écrit enfin :

$$\langle OM \rangle = \frac{\int_0^a \sqrt{a^2 + y^2}\, dy}{\int_0^a dy} = a \times \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du \text{ avec } u = y/a$$

La dernière intégrale n'est pas vraiment triviale, on trouve :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 1,148$$

Le résultat est satisfaisant, puisqu'il est compris entre les valeurs extrêmes de OM/a soit $\left[1..\sqrt{2}\right]$

1.3 La sphère

Considérons toujours le même problème, mais cette fois le point M est un point quelconque intérieur à la sphère de centre O et de rayon R.

Cette fois, le voisinage du point M sera un volume élémentaire. De manière analogue au cas du disque, nous allons considérer une coque de rayon r et d'épaisseur élémentaire dr. Son volume peut se calculer en pratique de deux façons différentes selon ses connaissances et ses préférences personnelles.

Calcul du volume d'une coque élémentaire sphérique

- On connaît le volume d'une sphère de rayon r :

$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

On différentie cette fonction de r, ce qui exprime directement la variation de volume lorsque la sphère "enfle" de dr :

$$df = f'(r) \times dr = 4\pi r^2 \times dr = dV$$

- On connaît la surface d'une sphère de rayon r :

$$S = g(r) = 4\pi r^2$$

On en déduit le volume d'une coque de surface S et d'épaisseur dr :

$$dV = S \times dr$$

On constate que la surface d'une sphère est la dérivée par rapport à r de son volume

Finalement, la distance moyenne au centre s'écrit :

$$\langle OM \rangle = \frac{\int OM \times dV}{\int dV} = \frac{\int_0^R r \times 4\pi r^2 dr}{\int_0^R 4\pi r^2 dr} = \frac{\int_0^R r^3 dr}{\int_0^R r^2 dr} = \frac{R^4/4}{R^3/3} = \frac{3}{4}R$$

Dans ces exemples géométriques, nous avons rencontré des domaines linéiques, surfaciques et volumique. De manière générale, on aurait du écrire respectivement des intégrales simples, doubles et triples. La symétrie des problèmes nous a permis de se limiter à des intégrales simples : la seule variable sensible étant le rayon r. De manière très générale, on se limite à étudier de tels problèmes de haute symétrie.

En contre-exemple, et pour montrer que les choses peuvent se compliquer rapidement, traitons le cas de la distance moyenne entre un point M à l'intérieur d'un carré et son centre O.

1.4. Le carré (surface)

Avec les mêmes notations qu'en 1.2. , il nous faut maintenant choisir un élément de surface élémentaire selon x et selon y soit (noter le changement de notation !)

$$d^2S = dx \times dy$$

Avec

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La symétrie nous autorise à calculer la moyenne sur le "premier quadrant" du repère, soit :

$$\langle OM \rangle = \frac{\int_0^a dx \int_0^a \sqrt{x^2 + y^2}\, dy}{\int_0^a dx \int_0^a dy}$$

En prenant la distance a comme unité de longueur on simplifie légèrement l'écriture :

$$\frac{\langle OM \rangle}{a} = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$$

L'intégration sur y doit se faire en considérant x comme constante : on parcourt une bandelette infiniment mince dans la direction x. On obtient une fonction de x seul, que l'on intègre alors selon x !

C'est plus simple à dire qu'à faire, un logiciel de calcul formel invoque la fonction hypergéométrique et donne finalement comme résultat :

$$\frac{\langle OM \rangle}{a} \approx 0,7651957...$$

Il serait intéressant de tester une méthode statistique qui consisterait ici à chercher la valeur moyenne prise par la variable aléatoire :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

avec x et y, deux variables aléatoires distribuées uniformément dans l'intervalle [0..1]

2 Mécanique

2.1. Centre de masse

Considérons un système mécanique quelconque. Certaines propriétés, son poids par exemple, sont simplement liées à sa **masse totale M** , le fait que le solide soit homogène ou non n'a pas d'importance. Cependant si l'on veut préciser le point d'application du vecteur poids, c'est-à-dire déterminer la position du centre de masse G, il faut déterminer une **moyenne des positions pondérées par les masses**.

- **Ensemble de masses ponctuelles** (*cas fini, discret* !) : m_i localisée en P_i

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times m_i}{M}$$

- **Ensemble continu de masses** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OP} \times dm}{\int dm} = \frac{\int \overrightarrow{OP} \times dm}{M}$$

La **pondération** se fait toujours sur les masses.

On se ramène en pratique à une **intégration** dans l'espace à l'aide de la notion de **densité** volumique, surfacique ou linéique selon les expressions bien connues :

$$dm = \rho(P)d\tau \text{ ou } dm = \sigma(P)dS \text{ ou } dm = \lambda(P)d\ell$$

La densité étant une fonction scalaire de l'espace (éventuellement du temps) : **champ scalaire**.
En pratique, on se donne un repère d'espace, le point P est alors repéré par ses coordonnées.
Ainsi, pour une répartition volumique, on utilisera (selon la symétrie du système) des coord.:
cartésiennes (x,y,z) cylindriques (r, φ, z) ou sphériques (R, θ, φ)
Finalement l'élément dm s'exprimera de façon "fonctionnelle" et géométrique. Par exemple :

$$dm = \rho(x,y,z) \times dx \times dy \times dz$$

- **Densité moyenne du système**

La densité (volumique) moyenne se définit naturellement comme le rapport de la masse totale sur le volume total. Il est clair qu'il s'agit d'une moyenne de la fonction densité (locale) sur le volume :

$$\langle \rho \rangle = \frac{M}{\tau} = \frac{\int \rho d\tau}{\int d\tau}$$

Nous venons donc de définir deux moyennes $\overrightarrow{OG}$ et $\langle \rho \rangle$ définies sur des **domaines différents**.
$\overrightarrow{OG}$ est une moyenne "massique" alors que $\langle \rho \rangle$ est une moyenne "volumique".
Signalons que l'on confond souvent le centre de masse G, avec le centre de gravité (*point d'application du vecteur poids*) *à condition que le champ de pesanteur* $\vec{g}$ *soit sensiblement uniforme sur le domaine étudié* ! (*Justifiant le symbole G*). *Dans le cas contraire, il n'est de toute façon pas*

évident de parler d'un point d'application de l'ensemble des "poids élémentaires"

2.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'une masse ponctuelle (puis élémentaire) est le vecteur :

$$\vec{p} = m \times \vec{v} \;\; ; \;\; d\vec{p} = dm \times \vec{v}$$

On constate au passage que $\overrightarrow{dp}$ ne doit en aucun cas être écrit comme la différentielle d'un produit : $d(m\vec{v}) = dm \times \vec{v} + m \times \overrightarrow{dv}$!!

En effet $\overrightarrow{dp}$ représente la qté de mvt d'une masse ***élémentaire*** *dm animée d'une vitesse $\vec{v}$* ***finie****.*

Si le repère utilisé pour déterminer G est bien lié au référentiel de description du mouvement on a $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

La quantité de mouvement d'un système de masse totale M est la la somme (l'intégrale) des valeurs élémentaires :

$$\vec{P} = \int dm \times \vec{v} = \int dm \times \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \overrightarrow{OP} dm = \frac{d}{dt}(M\overrightarrow{OG}) = M\vec{v}_G$$

On a utilisé la propriété de ***commutation des opérateurs linéaires*** :

Intégration (*sur les masses et donc dans l'espace*) *et* ***dérivation*** (*dans le temps*). *Symboliquement* :

$$\int dm \otimes \frac{d}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \otimes \int dm$$

Qui peut s'énoncer : "**la valeur moyenne d'une dérivée par rapport au temps est égale à la dérivée de la valeur moyenne**" :

$$\langle \vec{v} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle \vec{r} \rangle = \vec{v}_G$$

La vitesse du centre de masse (point géométrique et non matériel) est donc une moyenne des vitesses pondérée par les masses :

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\int \vec{v} \times dm}{\int dm} \Leftrightarrow \vec{P} = M\overrightarrow{v_G}$$

2.3 Energie cinétique

Par une démarche analogue, on écrit l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle (puis élémentaire) :

$$E_c = m \times \frac{v^2}{2} \;\; ; \;\; dE_c = dm \times \frac{v^2}{2}$$

Par simple addition (intégration) , pour un système matériel de masse totale M, on fait aparaître une nouvelle moyenne sur les masses :

$$E_c = \int dE_c = \int \frac{v^2}{2} dm = \frac{M}{2} \times \frac{\int (v^2) dm}{\int dm} = \frac{M}{2}\langle v^2 \rangle$$

On définit alors la vitesse quadratique moyenne (cf thermo, mécanique des fluides) , en anglais root mean square speed (RMS speed) :

$$V_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \quad \text{telle que } E_c = \frac{1}{2} M V_{qm}^2$$

La vitesse quadratique moyenne est la vitesse uniforme qui confère la même énergie cinétique totale que dans le mouvement réel.

Il faut être prudent dans la manipulation de la moyenne d'un carré, en particulier $V_{qm} \neq v_G$

En effet la moyenne d'un carré n'est pas égal au carré d'une moyenne !

Il est temps de préciser les **propriétés importantes des grandeurs moyennes** (découlant du caractère linéaire de l'opérateur intégration)

* La moyenne d'une constante λ est la constante elle-même $\langle\lambda\rangle = \lambda$
* La moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes : $\langle x+y\rangle = \langle x\rangle + \langle y\rangle$
* La moyenne d'un produit **n'est pas égale au** produit des moyennes : $\langle xy\rangle \neq \langle x\rangle\langle y\rangle$ En particulier : $\left\{\langle x\rangle = 0\ ,\ \langle y\rangle = 0\right\} \nRightarrow \langle xy\rangle = 0$

Néanmoins, les cas où cette dernière proposition est vraie sont particulièrement importants : *directions principales d'inertie* (*méca*), *variables aléatoires non corrélées* (*statistiques*) , *fonctions "orthogonales" sur un domaine* (*séries de Fourier*, *mécanique quantique*),...

* Moyenne du produit d'une variable (x) par une constante (λ) : $\langle\lambda x\rangle = \lambda\langle x\rangle$
*On en déduit les résultats importants : $\langle(\lambda+x)^2\rangle = \langle\lambda^2+x^2+2\lambda x\rangle = \lambda^2+\langle x^2\rangle+2\lambda\langle x\rangle$
* $\langle(x+y)^2\rangle = \langle x^2\rangle+\langle y^2\rangle+2\langle xy\rangle$

2.4 Solide en rotation. Moment d'inertie et rayon de giration

Soit un solide S en rotation Ω autour d'un axe Δ. La norme de la vitesse d'un point P du solide s'écrit $v = \Omega\times r$

Où r est la distance du point P à l'axe.

L'énergie cinétique d'une masse dm localisée en P s'écrit :

$$dE_c = dm\times\frac{v^2}{2} = \frac{\Omega^2}{2}\times r^2dm$$
$$\Rightarrow E_c = \frac{\Omega^2}{2}\times\int r^2dm = I_\Delta\times\frac{\Omega^2}{2}$$

Introduisant le **moment d'inertie** par rapport à l'axe de rotation :

$$I_\Delta = \int r^2dm$$

Comme pour la vitesse quadratique moyenne, il est pratique d'introduire un "**rayon de giration**" R_o tel que :

$$R_o^2 = \langle r^2\rangle = \frac{\int r^2dm}{M} = \frac{I_\Delta}{M}$$

L'énergie cinétique s'écrit alors :

$$E_c = \frac{M}{2}\times(\Omega R_o)^2 = \frac{M}{2}\times(V_{qm})^2$$

Le rayon de giration, rayon quadratique moyen, est la distance à l'axe à laquelle il faudrait concentrer toute la masse du solide pour que la particule ainsi formée possède exactement l'énergie cinétique de rotation. La vitesse de cette particule est donc d'après ce qui précède la vitesse quadratique moyenne :

$$V_{qm} = \Omega R_o$$

La notion de moyenne permet au bout de compte de généraliser à des systèmes étendus des résultats connus pour des masses ponctuelles.

2.5 Théorèmes de Koenigs et de Huygens

Nous rapprochons ces deux théorèmes parce qu'ils reposent sur la même base mathématique.

Soit une variable X (position, vitesse,...) pondérée sur un domaine (répartition de masses en mécanique).

Soit $X_m = \langle X\rangle$ sa valeur moyenne et $x = X - X_m$ la variable "centrée" associée.

On a bien sûr : $\langle x\rangle = 0$ (Justifiez-le !).

Au niveau de sa grandeur quadratique associée, on obtient le résultat fondamental :

$$\begin{aligned}\langle X^2\rangle &= \langle (x+X_m)^2\rangle = \langle x^2\rangle + X_m^2 + 2\langle x\rangle X_m \\ &= \langle x^2\rangle + X_m^2\end{aligned}$$

Si la variable X est vectorielle, le résultat est toujours valable.
Les produits devenant des produits scalaires (cf. ci-dessous)

- **Théorème de Koenigs**

Soit $\vec{V}(P)$ le champ de vitesses d'un système mécanique. Soit $\vec{V}_G = \left\langle \vec{V} \right\rangle$: vitesse du centre de masse.

Soit $\vec{v}(P) = \vec{V}(P) - \vec{V}_G$: champ de vitesse mesuré dans le **référentiel barycentrique**. On obtient :

$$\langle V^2\rangle = \left\langle \left(\vec{V}_G + \vec{v}(P)\right)^2 \right\rangle = V_G^2 + \langle v^2\rangle + 2\vec{V}_G.\left\langle \vec{v}\right\rangle$$

$$\text{Or } \left\langle \vec{v}\right\rangle = 0 \text{ en effet } \left\langle \vec{v}\right\rangle = \left\langle \vec{V}(P) - \vec{V}_G \right\rangle = \vec{V}_G - \vec{V}_G = 0$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}M\langle V^2\rangle = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}M\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}MV_G^2 + (E_c)_{Bary}$$

- **Théorème d'Huygens**

Soit Δ un axe de rotation et Δ' un axe parallèle passant par le centre de masse G (axe central).
Soit d la distance entre ces axes.
Soit P, un point quelconque du système mécanique étudié H et H'les points de percée sur les deux axes du plan orthogonal par P

Notons respectivement : $\left\| \overrightarrow{HP} \right\| = r(P)$; $\left\| \overrightarrow{HP'} \right\| = r'(P)$ et $\left\| \overrightarrow{HH'} \right\| = d = Cste$

Les moment d'inertie du système par rapport aux axes Δ et Δ' valent respectivement :
$I_\Delta = M\langle r^2\rangle$; $I_{\Delta'} = M\langle r'^2\rangle$

On montre alors de la même manière que le théorème précédent :

$$\langle r^2\rangle = \left\langle r'^2\right\rangle + d^2$$

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + Md^2$$

Conclusions générales :

- L'énergie cinétique mesurée dans le référentiel barycentrique est plus faible que dans tout autre référentiel (en translation).

De même, le moment central d'inertie est plus faible que par rapport à tout axe (parallèle) non central.

- Il est souvent plus commode de calculer la valeur "centrée" (symétrie) et d'appliquer l'un ou l'autre théorème pour calculer la valeur "non centrée".

3 Electricité Courant électrique

Le courant électrique est un débit de charge , c'est une grandeur "locale" , de variable t : le temps.
On définit alors un courant moyen et un courant efficace par des moyennes temporelles :

- **Courant moyen**

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \langle I\rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} i(t)dt$$

On considère souvent des **courants périodiques** . Soit T la période telle que $i(t+nT) = i(t)$
L'intervalle de temps choisi sera donc naturellement la période T :

$$T = t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- **Décomposition "barycentrique"**

De même qu'en mécanique, il est souvent commode de faire référence au "barycentre" de la distribution de courant, un signal périodique se décompose en

un **signal moyen constant** I_m
et un **signal alternatif** (de moyenne nulle) noté par une minuscule : i(t)

$$I(t) = I_m + i(t) \quad \text{avec} \quad I_m = \ < I > \ = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} I(t)dt \quad \text{et} \quad \langle i \rangle = 0$$

- **Courant efficace**.

La puissance instantanée dissipée par un courant dans une résistance pure s'écrit : $P(t) = R \times I^2(t)$
On définit le courant efficace comme le courant constant qui, traversant une résistance pure, dissiperait la même **puissance moyenne** que le courant étudiée. On a donc :

$$I_{eff}^2 = \langle I^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i^2(t)dt$$

Soit un courant décomposé en sa valeur moyenne et sa valeur alternative : $I(t) = I_m + i(t)$
Montrer (par analogie avec les théorèmes mécaniques de Koenigs ou d'Huygens):

$$I_{eff}^2 = I_m^2 + \langle i^2 \rangle$$

- **Décomposition en série de Fourier "Formule de Parseval"**

La composante alternative d'un signal périodique peut elle-même se décomposer en série de Fourier selon

$$i(t) = c_1 \times \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 \times \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots$$

Les facteurs en cosinus possèdent les propriétés importantes (fonctions orthogonales) :

$$\langle \cos(n\omega t + \varphi_n)^2 \rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle \cos(n\omega t + \varphi_n) \times \cos(m\omega t + \varphi_m) \rangle = 0 \quad (n \neq m)$$

Il est alors facile de montrer :

$$\langle i^2 \rangle = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + \ldots)$$

L'orthogonalité des fonctions sinusoïdales permet ainsi de "confondre" le carré d'une somme avec la somme des carrés !
Ainsi un courant sinusoïdal pur : $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ a une valeur efficace : $I_{eff} = A/\sqrt{2}$
Alors qu'un courant périodique décomposé en :
$I(t) = I_m + c_1 \times \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 \times \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots + c_n \times \cos(n\omega t + \varphi_n)$aura la valeur efficace :

$$I_{eff} = \sqrt{I_m^2 + \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{2}} \quad \text{Parceval}$$

Nous avons éviter d'assimiler le courant moyen à un terme alternatif de fréquence nulle selon :

$$I(t) = c_o \times cos(0 \times \omega t) + c_1 \times \cos(\omega t + \varphi_1) + \ldots = c_o + c_1 \times \cos(\omega t + \varphi_1) + \ldots$$

en raison de son traitement particulier dans l'expression. On obtient en effet :

$$I_{eff} = \sqrt{c_o^2 + \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2}{2}}$$

- **EXERCICES**

Calculer les valeurs moyennes et efficaces des courants périodiques suivants :
1 - Courant sinusoïdal + valeur continue ("offset")

$$I(t) = a + b\cos(\omega t)$$

2 -Courant périodique " triangulaire positif " :

$$0 \le t \le \frac{T}{2} \text{ : croissance linéaire de 0 à Imax}$$
$$\frac{T}{2} \le t \le T \text{ :décroissance linéaire de Imax à 0}$$

3 - Courant sinusoïdal redressé, mono-alternance :

$$0 \le t \le \frac{T}{2} \;:\; i(t) = I_{\max} \times \sin(\frac{2\pi}{T} t)$$
$$\frac{T}{2} \le t \le T \;:\; i(t) = 0$$

4 - Courant sinusoïdal redressé, bi-alternance :

$$i(t) = I_{\max} \times \left|\sin(\frac{2\pi}{T} t)\right|$$

Réponses
1 - $\langle i \rangle = a$; $I_{eff} = \sqrt{a^2 + b^2/2}$
2 - $\langle i \rangle = I_{\max}/2$; $I_{eff} = I_{\max}/\sqrt{3}$
3-$\langle i \rangle = I_{\max}/\pi$; $I_{eff} = I_{\max}/2$
4 - Par rapport au cas précédent, les moyennes sont doublées (Justifier !)
Donc $\langle i \rangle$ et $\langle i^2 \rangle$ doublent mais pas I_{eff} . Finalement :
$\langle i \rangle = 2I_{\max}/\pi$; $I_{eff} = I_{\max}/\sqrt{2}$

Voir en TP info la décomposition en série de Fourier de signaux classiques (rectangulaires, triangulaires) et la vérification de la formule de Parseval.

4 Statistiques

4.1 Distribution discrète

Soit un ensemble de N mesures : $x_1, x_2, ...x_N$ de ”poids” identiques, ou un ensemble de notes de même pondération.

La **valeur moyenne** vaut :

$$m = \langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{N}$$

La variance V est la **moyenne des carrés des écarts à la moyenne**, soit :

$$V = \langle x'^2 \rangle \text{ avec } x'_i = x_i - m \text{ : variable ”centrée”}$$

On montre (cf Huygens, Koenigs,)

$$V = \langle x^2 \rangle - m^2$$

L'écart-type σ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\langle x'^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{N}}$$

Soit un exemple (court !) sur 3 valeurs :

$$x_1 = 9\,;\, x_2 = 12\,;\, x_3 = 18$$
$$m = 13$$
$$x'_1 = -4\,;\, x'_2 = -1\,;\, x'_3 = 5 \text{ on contrôle } \langle x' \rangle = 0$$
$$V = \langle x'^2 \rangle = \frac{4^2 + 1^2 + 5^2}{3} = 14 \text{ : variance}$$
$$\sigma = \sqrt{V} = 3,74\text{...: écart-type}$$

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la valeur moyenne.

Vérifer le résultat : $V = \langle x^2 \rangle - m^2$

Une valeur de x_i s'écartant de plus de deux écart-types de la moyenne est considérée comme exceptionnelle...

Dans un DS c'est une très bonne (ou très mauvaise) note !

Remarques

- En statistique, on montre que l'estimateur de l'écart-type d'une population obtenue à partir d'un échantillon de la population est plutôt donné par la formule :

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{N-1}}$$

Pour une valeur faible de N, cette formule (qui ne se justifie pas si l'on travaille sur la population complète !) donne un résultat sensiblement différent.

Dans notre exemple on trouve :

$$\sigma_{N-1} = 4,58\ldots$$

Il est courant de publier la moyenne et l'écart-type des notes de DS d'une classe.

Vérifiez les résultats publiés sur le dernier DS de physique.

Contrôler si la formule utilisée pour calculer l'écart-type est celle avec N ou avec N - 1 .

Ces paramètres statistiques sont préprogrammés dans les calculatrices. Vérifiez si vous savez les utiliser !

- En cas de pondération p_i variable avec x_i , il convient de remplacer dans les formules x_i par $p_i x_i$ et N par $\sum p_i$

4.2 Distribution continue (pour mémoire)

On modélise souvent une variable "aléatoire" par une loi continue caractérisée par une **densité de probabilité** f(x) telle que la probabilité dp d'observer la valeur x à dx près est donnée par :

$$dp = f(x)dx$$

- **Normalisation**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- **Espérance mathématique** (**valeur moyenne**)

$$E = m = \int x \times f(x)dx$$

Analogue à l'abscisse du centre de masse d'une répartition linéique de densité f(x) et de masse totale unité (d'où absence de dénominateur).

- **Variance V Ecart-type** σ

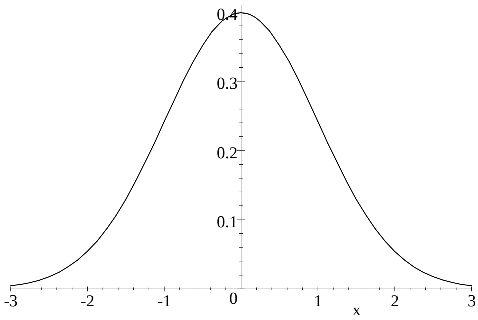
$$V = \langle (x-m)^2 \rangle = \int (x-m)^2 \times f(x)dx = \sigma^2$$

L'écart-type est analogue à un rayon de giration *centré* (mécanique) ou à une valeur efficace *d'un signal alternatif* (électricité).

Exemple : **loi normale** (**Gauss**)

La loi normale standard est de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$



Montrer qu'elle est bien **normalisée** : moyenne est nulle et écart-type unité (logiciel de calcul formel recommandé pour l'écart-type).

Il est toujours possible de passer d'une variable X de moyenne m et d'écart-type σ à une variable standardisée (réduite) x par le changement de variable :

$$x = \frac{X - m}{\sigma}$$

Montrer que la loi normale non standardisée (associée à X) est alors de densité :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2]$$

5 Thermodynamique

Soit un fluide en écoulement.

Il est constitué d'un très grand nombre de particules (Na = 6.10^{23} particules pour mole !).

La vitesse d'une particule peut être décomposée en deux termes :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{v'}$$

où $\overrightarrow{V_G} = \left\langle \overrightarrow{V} \right\rangle$ est la vitesse du centre de masse

$\overrightarrow{V_G}$: vitesse d'entraînement d'ensemble, ou encore "vitesse de l'écoulement".

$\overrightarrow{v'}$: vitesse mesurée dans le référentiel du centre de masse, dans lequel le fluide est "au repos" , traduisant l'agitation thermique.

Gaz parfait monoatomique

Ex. : gaz "rares" : He, Ne, Ar ou vapeurs métalliques Hg, Na,...

Dans ce cas les atomes de gaz se comportent comme des particules ponctuelles , de masse notée m_o , quasi sans interactions.

L'énergie interne, qui est justement l'énergie mesurée dans le réf. du centre de masse est exclusivement constituée de l'énergie cinétique des N particules :

$$U = \sum_{i=1}^{N} m_o \frac{v_i'^2}{2} = N \times m_o \times \frac{\langle v'^2 \rangle}{2} = nM \times \frac{\langle v'^2 \rangle}{2}$$

Où l'on a noté : $n = N/N_a$: le nombre de moles ; $M = m_o \times N_a$: la masse molaire avec $N_a = 6{,}022.10^{23}$ le nombre d'Avogadro

La physique statistique relie simplement l'énergie cinétique moyenne d'une particule à la température absolue T :

$$m_o \times \frac{\langle v'^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

où $k_B = R/N_a = 1,38.10^{-23}\, J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann, expression "microscopique" de la constante bien connue $R = 8,314\, J.K^{-1}.mol^{-1}$

On en déduit immédiatement :

$$M \times \frac{\langle v'^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} RT \quad ; \quad U_{mono}(T) = \frac{3}{2} nRT$$

A.N. Calculer la vitesse quadratique moyenne et l'énergie interne molaire de l'Hélium à température ambiante : $\theta = 25°C$

Rép.: $\sqrt{\langle v'^2 \rangle} = v_{qm} = 1363\, m.s^{-1}$; $U/n = 3,71\, kJ.mol^{-1}$

Gaz parfait diatomique

Dans ce cas l'énergie thermique d'une particule est elle-même constituée de deux termes : énergie cinétique de translation du centre de masse (3 degrés de liberté) et énergie cinétique de rotation autour du centre de masse (2 d. l.) , du moins à T pas trop éloignée des valeurs ambiantes.

La physique statistique prévoit (th. de l'auipatition de l'énergie) pour 5 d.l. au total :

$$U_{di}(T) = \frac{5}{2} nRT$$

Ces résultats de physique statistique ne sont pas vraiment au programme, ils donnent néanmoins une interprétation mécanique plus concrète à la notion de température et justifie la célèbre loi de Joule : *l'énergie interne d'un GP ne dépend que de la température et ce de manière linéaire* (*dans une gamme raisonnable de températures*)