

Illustration physique de l'intégration

Du linéaire au quadratique

1. Equations d'état linéaires

De nombreuses lois physiques sont linéaires. Ce sont en général des approximations de la "réalité" satisfaisantes dans une domaine limité de variation des paramètres étudiés.

Prenons quelques exemples, bien connus :

- Dipôles électriques linéaires :

$$U_R = R \times i = \frac{1}{G} \times i \quad (\text{Loi d'Ohm, notion de résistance, conductance})$$

$$U_C = \frac{1}{C} \times q \quad (\text{Notion de capacité})$$

$$U_L = L \times \frac{di}{dt} \quad (\text{Notion d'auto-inductance ou "self-inductance"})$$

- Comportements mécaniques linéaires

$$F_x = -k \times x \quad (\text{Rappel élastique})$$

$$F = m \times \frac{dv}{dt} \quad (\text{Inertie})$$

$$F_f = -\lambda \times v \quad (\text{frottement "visqueux"})$$

- Exemples géométriques...

$$P_{Ce} = K \times r = 2\pi \times r \quad (\text{Périmètre du cercle})$$

$$P_{Ca} = K \times a = 4 \times a \quad (\text{Périmètre du carré})$$

Ces lois décrivent une relation linéaire entre des **variables d'état** du système étudié. Le coefficient de proportionnalité étant une caractéristique du système.

Pour les exemples mécaniques il s'agit de la force associée au déplacement ou à ses dérivées temporelles : vitesse, accélération. Pour les dipôles électriques, les variables d'état sont la tension à ses bornes et la charge électrique le traversant, ou ses dérivées temporelles : courant, dérivée du courant.

Un comportement linéaire se caractérise par un coefficient de proportionnalité constant : raideur k d'un ressort, masse inerte m , résistance électrique R ,...

Le fait que selon le type de comportement, une variable d'état puisse être remplacée par sa dérivée temporelle ne change pas le caractère linéaire, l'opération de dérivation étant elle-même linéaire.

On remarque que l'on a parfois adopté une notation différentielle explicite (di/dt , dv/dt) ou parfois introduit une nouvelle notation ($v = dx/dt$, $i = dq/dt$) Nous allons illustrer le fait que cette notation différentielle est essentielle pour savoir réaliser l'opération inverse qui est l'intégration !

Les exemples géométriques ne semblent pas vraiment à leur place ici. Il sont pourtant essentiels à la compréhension concrète de la notion d'intégration que nous allons aborder maintenant.

2 Intégration des lois linéaires

Si l'on s'en tient à l'aspect purement mathématique il s'agit d'illustrer le résultat :

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + Cste$$

Cas particulier d'une formule générale que tout "taupin" doit connaître :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + Cste \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + Cste$$

Il ne s'agit justement pas d'appliquer une formule par coeur mais de comprendre ses implications profondes, ce qui ne semble pas toujours évident lorsque l'on voit les "étourderies" classiques :

- Confusion entre dérivation et intégration
- Intégration par rapport à une "mauvaise" variable
- Confusion entre variable et constante dans l'équation d'état
- Oubli de la constante d'intégration

Commençons par l'exemple géométrique du cercle :

Du périmètre à la surface du cercle

Soit un cercle de rayon r , son périmètre vaut (*définition de Pi*) : $P = 2\pi \times r$

Si concrètement nous voulons peindre cette circonférence sur la pelouse d'un stade de football (par exemple), la question se pose de connaître la surface de peinture (ou de craie) nécessaire. Soit e l'épaisseur du trait, il est clair (pour le peintre) qu'il va remplir une surface $S = P \times e$.

Pour le mathématicien et pour l'élève, le résultat n'est pas si évident. En effet, le résultat est incontestablement rigoureux s'il s'agit de peindre ainsi un bord rectiligne (du terrain de foot...) mais du fait de la courbure, il flotte une impression d'à-peu-près dans l'expression. En particulier, que devient le rayon r dans l'expression de P ? En effet, si r représente le rayon intérieur de la bande de craie, alors ce rayon varie entre r et $r+e$! et la valeur est sûrement minorée. On pourrait se dire que si l'on "coupe la poire en deux" en écrivant : $P = 2\pi \times (r + e/2)$ le résultat doit être "très bon". On peut aussi se dire que le résultat sera d'autant meilleur que e sera petit devant r . Depuis Newton et Leibnitz, on sait que l'on ne commet pas d'erreur si e est "infinitement petit" devant r , mais bien sûr la surface devient aussi infinitement petite et l'on écrira :

$$dS = 2\pi r \times dr$$

En confondant résolument différentielle et infinitement petit...

A ce niveau, il n'est pas encore question de calcul intégral mais bien de calcul différentiel.

Le pas crucial est le suivant :

Si dr et dS sont vraiment "infinitement" petits, cela ne résoud pas le problème de notre peintre !

Pour traiter une épaisseur finie de peinture, il faut admettre qu'en SOMMANT des infinités petits on peut retrouver EXACTEMENT la valeur de la surface associée à une épaisseur e quelconque de peinture.

En pratique, il n'est pas facile du tout d'admettre qu'en sommant une infinité d'expressions "presque" exactes, l'erreur reste négligeable. Il faudrait discuter longuement de la notion de grandeur négligeable (ordres des infinités petits...)

Nous admettons donc la "formule d'intégration" :

Soit r_1 et r_2 avec $r_2 - r_1 = e$, on note :

$$S = \int_{r_1}^{r_2} dS = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \times dr = [\pi r^2]_{r_1}^{r_2} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

Vérification : contrôler que ce résultat est bien équivalent à :

$$S = \langle P \rangle \times e \text{ avec } \langle P \rangle = 2\pi \times (r_1 + \frac{e}{2}) : \text{périmètre moyen}$$

Nous avons utilisé, sans la justifier, la formule d'intégration $\int x dx$.

L'important ici étant de montrer l'aspect concret du résultat.

Le mathématicien s'empressera pour sa part de "construire" la fonction :

$$f := x \rightarrow \pi x^2$$

et expliquera que la surface que nous venons de calculer vaut :

$$S = f(r_2) - f(r_1)$$

Ou encore que f est une primitive de $g := x \rightarrow 2\pi x$

Le physicien ne conteste absolument pas la rigueur de cette présentation, il s'en félicite au contraire.

Il demande simplement que l'on veuille bien se rappeler que pour lui, f et g sont respectivement une surface et une longueur, qu'elles n'ont donc pas la même dimension physique, que le dx du $2\pi x \times dx$ est bien plus qu'un symbole préparatoire à l'intégration mais est un facteur dimensionnel d'un produit

Par ailleurs, il aimerait que l'on évite le "communautarisme" consistant à classer la surface dans la catégorie "fonction" et le rayon dans la catégorie "variable". Les rôles peuvent en effet être inversés en pratique et le résultat est parfois un peu plus compliqué (ou plus simple selon le point de vue) que la notion de fonction inverse (carré \rightarrow racine carrée).

Enfin, on voit clairement la signification de la "constante d'intégration". Si l'on intègre entre deux bornes (r_1, r_2) la question ne se pose pas (intégrale définie). Parfois, la primitive naturelle, c'est-à-dire celle obtenue en "oubliant" la constante a une signification immédiate et satisfaisante : ici πr^2 représente la surface d'un cercle de rayon r . La démarche n'est pas "anodine" : on a fait $r_1 = 0$ ET $r_2 = r$ c'est à ces deux conditions que la surface de la bande de peinture $S(r_1, r_2)$ est devenue une fonction d'une seule variable : $S(r)$. Je pense personnellement qu'un des plus graves problèmes d'incompréhension entre la démarche physique et la démarche mathématique est l'oubli du passage par l'intégration (la sommation) lors du passage : $2\pi r \rightarrow \pi r^2$.

Mathématiquement, on ne voit plus que deux fonctions de r .

Physiquement, la première expression est LOCALE : on circule en restant à la distance r du centre.

La seconde est GLOBALE : on parle de toute la surface accessible lorsque l'on se déplace partout dans le cercle entre le centre et sa circonférence.

Exercice : Appliquer la même démarche à l'autre exemple géométrique : passage du périmètre du carré à sa surface.

Exercices liés : démonstration des deux théorèmes de Guldin, surface d'un triangle (feuille d'exercices en préparation)

3 De la force à l'énergie

Abordons maintenant les exemples physiques d'intégration de lois linéaires.

Nous venons de voir que l'intégration changeait la nature d'objet géométrique : longueur \rightarrow surface,

c'est encore plus frappant dans les exemples électro-mécanique : force \rightarrow énergie.

Rappelons encore que ces notes ne constituent pas un cours mais une illustration des idées générales de la démarche scientifique et de ses rapports étroits avec des notions plus ou moins

élémentaires de mathématiques. Des lois ou des principes généraux, fort importants en pratique seront donc simplement rappelés sans justification.

3.1. Energie potentielle élastique

Soit un "ressort" de raideur constante k , soumis à un allongement x .

La force de rappel qu'il exerce en réaction à cette contrainte est de la forme :

$$F = -k \times x$$

Cette expression est d'une simplicité trompeuse : on oublie le caractère vectoriel de la force, le signe - reste souvent fort mystérieux (surtout si l'on introduit vicieusement des idées d'action-réaction...)

Pour l'instant, essayons de garder un point de vue "naïf" mais concret et efficace.

Imaginons de faire croître l'allongement de dx (pour la simplicité, on suppose pour l'instant x et dx positifs). Cela nécessite un opérateur extérieur qui tire plus fort. Si l'on considère que cela se fait de manière quasi-statique (vocabulaire cher à la thermo), la force de l'opérateur est tout juste opposée à celle du ressort (quasi-équilibre) $F_{ext} = +k \times x$ Le travail élémentaire de cette force extérieure durant l'accroissement d'allongement (ouf!) dx vaut :

$$\delta W_{ext} = +kx \times dx$$

Nous avons adopté la notation δ caractérisant une forme différentielle, notion cruciale lorsqu'il y a PLUSIEURS variables d'état comme c'est souvent le cas pour des systèmes thermodynamiques.

Il est clair qu'ici, ce travail est équivalent à une différentielle ordinaire (comme $dS = 2\pi r \times dr$), nous allons de plus considérer que ce travail contribue à augmenter l'**énergie stockée** dans le ressort. En thermodynamique, on stocke souvent de l'énergie en chauffant l'objet, ici il s'agit d'un stockage d'énergie potentielle mécanique, on écrit donc :

$$\delta W_{ext} = dE_p = +kx \times dx$$

Le travail utilisé pour faire croître de manière finie x de x_1 à x_2 s'écrit donc :

$$W_{12} = \int_1^2 dE_p = E_p(x_2) - E_p(x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Mathématiquement, la fonction $E_p(x)$ est définie à une constante près. Il est évidemment logique de considérer que le ressort détendu ne possède pas d'énergie et donc d'oublier la constante d'intégration en écrivant simplement :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

A nouveau l'intégration change la dimension physique de la grandeur.

Dans le système internationale : Force en Newton, Travail et Energie en Joule

Notons une différence essentielle entre comportements linéaire et quadratique :

Si $x = x_1 + x_2$ alors :

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$$

$$E_p(x_1 + x_2) = E_p(x_1) + E_p(x_2) + kx_1x_2$$

Le dernier terme pourra, selon les circonstances s'appeler **terme de couplage** ou **terme d'interférence**

Notons également que si l'on relie l'énergie potentielle à la force de rappel élastique, il y a un changement de signe, que l'on retrouvera dans tous les exemples physiques, soit :

$$dE_p = -F_{\text{rappel}} \times dx$$

Cette formulation est plus satisfaisante pour les calculs que celle introduisant un opérateur extérieur et une évolution particulière : évolution quasi-statique. En fait, l'énergie potentielle (comme l'énergie interne en thermo) se conçoit clairement à l'aide de telles opérations quasi-statiques (et réversibles...) mais possède une existence finalement liée à la seule loi de force "interne", ici le rappel élastique.

Encore une fois, la simplicité mathématique de l'intégration cache une foule de questions qu'il faut pourtant bien se poser lors de l'étude d'un problème concret !

De nombreuses questions non abordées ici seront développées dans un chapitre spécifique au rappel élastique :

- Caractère vectoriel de la loi de force
- Prise en compte de la "longueur au repos", origine de l'énergie potentielle
- Limites du modèle : puits de potentiel quasi parabolique, limite élastique
- Propriétés générales des forces centrales conservatives.

3.2 Energie électrostatique

De manière générale, un dipôle électrique est caractérisé par sa tension aux bornes U et le courant électrique i le traversant. Ces grandeurs sont algébriques, selon la convention récepteur. Ces variables d'état sont des fonctions du temps, en particulier : $i(t) = dq/dt$

La puissance reçue par le dipôle s'écrit, toujours en convention récepteur :

$$P = U \times i$$

Le travail reçu de l'extérieur s'écrit donc :

$$\delta W := P \times dt = U \times idt = U \times dq$$

Cette dernière expression sera pleinement justifiée en électrostatique (la variable temps n'apparaissant plus) . Une application immédiate sera donc l'établissement de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur.

Le raisonnement est en tout point semblable à celui mené dans l'étude de l'énergie élastique. Soit un condensateur de capacité C , d'équation d'état :

$$U_C = \frac{1}{C} \times q$$

Lorsqu'on le charge de manière quasi-statique, grâce à une source de fem $U = U_C$, le travail reçu s'écrit :

$$\delta W = \frac{q}{C} \times idt = \frac{1}{C} \times qdq = d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

Il est donc naturel d'assimiler ce travail à la variation élémentaire d'une énergie potentielle (électrostatique) d'expression :

$$E_{pe} = \frac{q^2}{2C}$$

En posant nulle la constante d'intégration, puisqu'il est naturel d'associer une énergie nulle à un condensateur déchargé (tout comme à un ressort au repos).

Noter la différence d'approche entre la notion de raideur d'un ressort et de capacité d'un condensateur. On pourrait faire la même remarque entre les notions de résistance et de conductance. Un chapitre spécifique traitera d'ailleurs du choix judicieux d'une grandeur physique ou de son inverse (notion de dualité)

Il est intéressant de voir que l'énergie électrique stockée dans un condensateur, tout comme l'énergie élastique stockée dans un ressort est **définie positive**. Que le ressort soit comprimé ou étiré, que le condensateur soit polarisé dans un sens ou dans l'autre l'énergie reste positive.

En pratique certains condensateurs exigent d'être polarisé dans un sens bien défini et le béton préfère être comprimé que distendu (cf technologie des bétons précontraints)

3.3 Energie cinétique

Nous nous intéressons maintenant à une autre forme d'énergie.

L'énergie due à l'inertie (la masse) d'une particule et liée à sa vitesse.

La seconde loi de Newton relie la force et l'accélération subies par une particule :

$$F = m \times \frac{dv}{dt}$$

Tout comme pour le ressort, cette loi est en fait vectorielle. Dans cette première approche, on la considérera simplement algébrique, en se limitant par exemple à une trajectoire rectiligne.

Notons de plus que la notion de trajectoire, de vitesse ainsi que la "validité" de la loi d'inertie sont liés au choix d'un "référentiel adapté", nous admettrons qu'il en est bien ainsi.

Ces notions ne s'appliquent de manière simple qu'au "point matériel", il faudra étudier comment généraliser les résultats aux systèmes de points et aux solides.

Nous pouvons à nouveau considérer l'expression du travail qu'exerce la force F sur la masse lors d'un déplacement élémentaire :

$$\delta W = F \times d\ell = m \frac{dv}{dt} \times v dt = m \times v dv$$

On remarque l'avantage de la notation différentielle de l'accélération : $a = dv/dt$.

Le travail reçu apparaît comme une différentielle, la variation de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \delta W = dE_c$$

Relation connue sous le nom de **théorème de l'énergie cinétique**.

De nouveau il est naturel d'oublier la constante d'intégration en attribuant une énergie nulle à une particule au repos. La notion de repos étant sensiblement différente ici de celle de ressort au repos !

Une façon intéressante de comparer les analogies et les différences entre énergie élastique et énergie cinétique sera d'analyser le comportement d'un système masse + ressort.

Avant cela , étudions l'analogie électrique de l'énergie cinétique : l'énergie magnétique stockée dans une inductance.

3.4 Energie magnétique d'une inductance

Les phénomènes d'induction électriques sont analogues à l'inertie mécanique, la loi associée au niveau d'une "bobine idéale" étant :

$$U_L = L \times \frac{di}{dt}$$

Selon une démarche bien rodée, nous calculons le travail électrique reçu :

$$\delta W := P \times dt = U i \times dt = L \times i di = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Toujours selon la même démarche, nous pouvons définir l'énergie stockée :

$$E_{pm} = \frac{1}{2}Li^2$$

Energie potentielle magnétique, ainsi nommée puisque cette énergie n'est pas à proprement parler stockée dans le courant i mais plutôt dans le champ magnétique qui lui est associé.

L'analyse d'un circuit L C permet de manière analogue au système masse + ressort de comparer les énergies électriques et magnétiques.

Mais il nous faut d'abord étudier des exemples de forces qui ne peuvent être associées à des formes d'énergie : les forces dissipatives

4 Phénomènes dissipatifs

Rappelons que le fil directeur de cette monographie est d'illustrer la primitive "usuelle" :

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + Cste$$

Nous avons vu qu'elle s'appliquait dans de nombreux domaines fondamentaux de la physique. Jusqu'à présent la primitive existait bien et nous n'avions aucune raison d'en douter. Mais alors quel est le problème avec la loi d'Ohm ou la loi de frottement visqueux ? Regardons-y de plus près.

4.1 Loi d'Ohm et effet Joule

Soit un dipôle ohmique :

$$U_R = R \times i$$

La puissance électrique reçue s'écrit :

$$P = U_R \times i = R \times i^2$$

Nous avons bien une loi quadratique, définie positive mais il ne s'agit pas d'une énergie stockée.

La puissance reçue par une résistance est toujours positive (au sens large) : elle reçoit toujours et ne restitue jamais d'énergie. DU MOINS SOUS FORME ELECTRIQUE.

En effet, il n'est pas raisonnable de penser que cette énergie puisse être stockée et croître indéfiniment. En pratique elle est restituée à l'environnement sous forme de chaleur Joule.

En pratique la résistance commence par stocker l'énergie sous forme thermique (énergie interne) en s'échauffant, puis sa température se stabilise (si elle ne fond pas...) et la puissance Joule dissipée est exactement égale à la puissance électrique reçue.

Le phénomène est totalement irréversible, contrairement aux systèmes précédents qui pouvaient restituer l'énergie stockée sous la même forme (électrique ou mécanique) que l'énergie reçue.

Etudions de plus près l'aspect mathématique.

C'est la puissance qui a une forme bien définie à tout instant.

En revanche l'énergie électrique reçue durant une période donnée dépend de la forme précise du courant durant toute la période. Elle ne se réduit pas à un bilan : "état initial - état final"

Considérons par exemple que l'on fasse croître linéairement le courant de $i = 0$ à $i = I$ durant le temps T

L'énergie reçue s'écrit :

$$W = R \int_0^T i^2 dt = R \int_0^T \left(I \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{RI^2}{3} \times T = \langle P \rangle \times T$$

On peut dire simplement que dans ce cas, la puissance moyenne reçue $\langle P \rangle$ est égale au tiers de la puissance maximale : $P_{\max} = RI^2$

On peut refaire le calcul avec un courant sinusoïdal de la forme $i(t) = I \times \cos(\omega t)$

On trouve que la puissance moyenne reçue (sur un nombre entier de périodes) vaut alors :

$$\langle P \rangle = \frac{RI^2}{2} = R \times I_{eff}^2$$

Définissant le courant efficace (en régime sinusoïdal) $I_{eff} = I/\sqrt{2}$

Bref, nous venons de découvrir que dans certains cas, l'énergie (ou le travail) reçu ne dépendait pas seulement de l'état initial et de l'état final mais du chemin parcouru. Ici, ce chemin est une histoire au cours du temps, mais nous découvrirons des cas où indépendamment du facteur temps, le chemin suivi dans l'espace peut avoir une importance sur le travail reçu (forces non conservatives) mais cela nécessitera d'aborder très sérieusement l'analyse vectorielle et ses opérateurs associés (gradient, rotationnel...)

4.2 Travail de frottement

Le puissance mécanique "fournie" par une **force dissipative linéaire** est de la forme :

$$P_f = F_v \times v = -\lambda v \times v = -\lambda v^2$$

On trouve un processus mécanique équivalent à l'effet Joule, le travail élémentaire associé valant :

$$\begin{aligned} \delta W_f &= -\lambda v^2 dt \\ W_f &= -\lambda \int v^2(t) dt \end{aligned}$$

L'intégration n'étant possible que si l'on connaît la loi du mouvement $v(t)$ durant la période étudiée.

Le travail de frottement est toujours négatif (travail résistant), le thermodynamicien utilise la chaleur de frottement, qui (analogue à l'effet Joule) est positive :

$$Q_f = -W_f$$

5 Conclusion

Nous voyons que l'intégration d'une loi linéaire permet de modéliser de nombreux comportements importants dans différents domaines de la physique. La diversité des variables utilisées et des notions introduites montrent que si une primitive de la fonction x est la fonction $x^2/2$, cette "formule" n'est qu'une étape dans la construction d'un modèle du monde physique qui nous entoure.