Diffraction

La diffraction est le phénomène observé lorsque la lumière (ou une onde quelconque) est diaphragmée par une ouverture dont la taille ne peut plus être considérée comme infiniment grande vis-à-vis de la longueur d'onde. En particulier une onde rigoureusement plane, c'est-à-dire de direction de propagation parfaitement fixée de longueur d'onde λ passant dans un diaphragme d'extension d dans une direction donnée, subi une diffraction angulaire dans cette direction de l'ordre de grandeur de :

$$\theta_d = \frac{\lambda}{d}$$

1 Principe de Huygens-Fresnel

- Huygens (1678) : La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément
- Fresnel (1818) L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires.

2 Diffraction à l'infini (Fraunhofer)

Traduisons ce principe dans le cas suivant :

Considérons une onde plane monochromatique λ , se dirigeant selon Oz. Soit un écran situé dans le plan $x = 0$, dans lequel est percé un diaphragme centré en $O(0,0,0)$, limitant l'étendue spatiale de l'onde. On cherche à déterminer l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction caractérisée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ correspondant en pratique à une déviation faible par rapport à la direction incidente $\vec{u}_z = (0,0,1)$.

(*on peut remplacer comme d'habitude l'observation à l'infini par un "écran éloigné" ou mieux par le plan focal image d'une lentille, ou encore par un viseur réglé sur l'infini* !)

On caractérise cette direction par ses composantes cartésiennes (cosinus directeurs) :

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma \approx 1$$

L'amplitude complexe de l'onde diffractée dans la direction $\vec{u}$ est la somme étendue à tout le diaphragme des amplitiudes élémentaires :

$$a(\vec{u}) = \int da = K \int exp(i\varphi) dS(M)$$

- $dS(M)$ est un élément de surface du diaphragme, centré en M
- φ est le déphasage entre l'onde reçue (à l'infini...) depuis dS(M) et l'onde de référence associée au centre O du diaphragme :

$$\varphi = \varphi(M, \vec{u}) = \overrightarrow{OM}.\vec{k}(\vec{u}) = \overrightarrow{OM}.\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$$

Selon les conventions sur la phase d'une onde plane, on trouve parfois un changement de signe. Ce signe est sans aucune importance sur l'intensité finalement observée...

- Il est précisé dans le programme de la classe que tous les éléments de surface constituent des sources cohérentes de même amplitude, le facteur K constitue donc une simple constante de normalisation. Si l'on veut se référer à l'amplitude observée dans la direction non déviée on peut poser :

$$K = \frac{a_o}{S}$$

- En pratique le calcul de l'intégrale dépendra de la forme précise du diaphragme

3 Diffraction par une ouverture rectangulaire

Considérons un diaphragme rectangulaire d'extension :

$$-\frac{a}{2} < x < +\frac{a}{2} ; -\frac{b}{2} < x < +\frac{b}{2}$$

Soit $dS(M) = dx \times dy$ centré en $M(x,y)$

On obtient :

$$a(\vec{u}) = K \int\int exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \times (x\alpha + y\beta)\right] dx\, dy = K \int_{-a/2}^{+a/2} exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \times x\alpha\right] dx \int exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \times y\beta\right] dy$$

$$= K \times \left[a\frac{sin(\pi a\alpha/\lambda)}{\pi a\alpha/\lambda}\right] \times \left[b\frac{sin(\pi b\beta/\lambda)}{\pi b\beta/\lambda}\right] = a_o \times sinc(\frac{a\alpha}{\lambda}) \times sinc(\frac{b\beta}{\lambda})$$

Où l'on a introduit la fonction sinus cardinal :

$$sinc(p) = \frac{sin(\pi \times p)}{\pi \times p}$$

qui s'annule pour toute valeur entière de son argument, sauf à l'origine $sinc(0) = 1$

La notation p n'a pas été choisie par hasard, puisqu'il s'agit bien ici d'un ordre d'interférence analogue à celui que l'on a défini dans l'étude des fentes de Young.

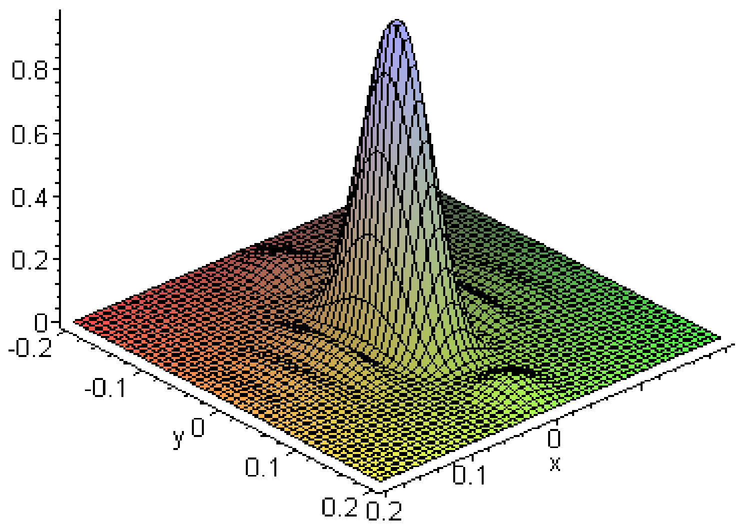
L'intensité observée étant simplement proportionnelle au carré module de l'amplitude complexe (réelle ici), on a :

$$I(\alpha, \beta) = I_o \times sinc^2(\frac{a\alpha}{\lambda}) \times sinc^2(\frac{b\beta}{\lambda})$$

Traçons le graphe de I dans le cas précis d'une fente allongée selon x :

$$\frac{\pi a}{\lambda} = 60; \frac{\pi b}{\lambda} = 30 \quad \text{soit} \quad \frac{a}{b} = 2$$

$$It = \left(\frac{\sin(60 \times \alpha)}{60 \times \alpha} \right)^2 \times \left(\frac{\sin(30 \times \beta)}{30 \times \beta} \right)^2$$



Sur le schéma x,y remplacent respectivement α, β

On constate que l'onde est plus diffractée dans la direction "étroite" de la fente.

Pour une fente très fine dans une direction (cf fentes de Young, réseau de diffraction) la diffraction n'est sensible que dans cette direction

On peut alors se contenter d'une étude plane, dans le plan perpendiculaire à la longueur des fentes.

Ainsi pour une fente infiniment longue selon Ox et de largeur e selon Oy éclairée par une onde plane incidente selon Oz, on peut introduire simplement l'angle θ de la direction d'observation avec la direction incidente.

De manière analogue à l'étude de l'interférence par les fentes de Young, on introduit l'ordre d'interférence associée aux déphasage entre les deux bords de la fente :

$$p = \frac{e \times sin(\theta)}{\lambda}$$

L'intensité observée sera de la forme :

$$I(\theta) = I_o \times sinc^2(p) = I_o \times \left[\frac{sin(\pi \times p)}{\pi \times p} \right]^2$$

Le premier zéro de diffraction sera caractérisé par $p = 1$ soit une différence de marche $\delta = \lambda$ entre les "sources secondaires extrêmes"

4 Diffraction par une ouverture circulaire

Quoique ce cas soit hors programme il peut toujours être proposé en application (*cf Banque PT* 2008 *B*...)

Les notations proposées dans cet énoncé sont sensiblement celles adoptées dans ce cours.

On cnsidère cette fois un diaphragme circulaire de rayon R , de centre O dans le plan Oxy. L'onde incidente se propageant selon Oz. On considère la diffraction dans la direction :

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma \approx 1, \beta = 0, \alpha \ll 1$$

L'intégration des amplitudes élémentaires se faisant sur une ouverture circulaire MAIS avec un découpage cartésien, il faut être vigilant sur les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} a(\vec{u}) &= K \int\int exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \times (x\alpha + y\beta)\right] dx\,dy \\ &= K \int_{-R}^{+R} exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \times x\alpha\right] dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= 2K \times \left[\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \times exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} \times x\alpha\right) dx\right] \end{aligned}$$

Il n'est évidemment pas demandé de calculer cette intégrale. Précisons qu'une variable sans

dimension s'impose, soit :

$$x^* = \frac{x}{R}$$

L'intégrale, sur cette nouvelle variable devient :

$$a(\vec{u}) = 2KR^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^{*2}} \times exp(im \times x^*)dx^* \quad \text{avec} \quad m = \frac{2\pi}{\lambda} \times R\alpha$$

On constate que selon Oz (déviation nulle, $\alpha = 0 \to m = 0$) on retrouve l'expression de K :

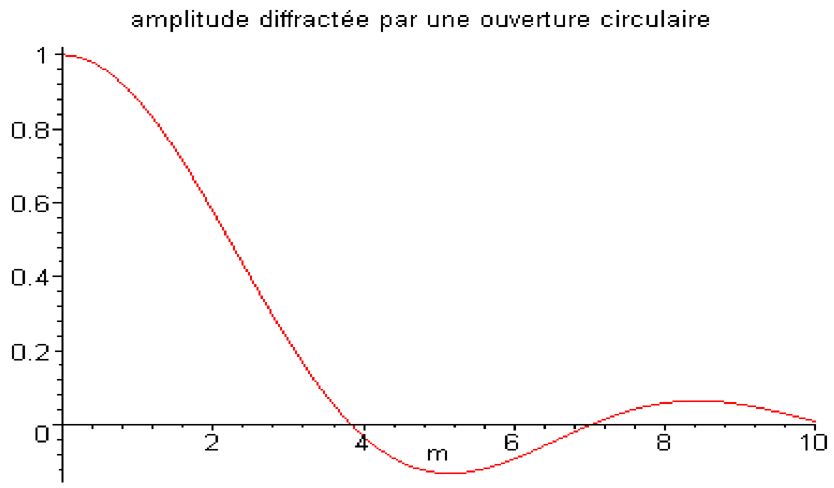
$$a_o = 2KR^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^{*2}}\, dx^* = 2KR^2 \times \frac{\pi}{2} \to K = \frac{a_o}{\pi R^2} = \frac{a_o}{S}$$

En décomposant l'exponentielle complexe en sin et cos, on peut décomposer l'intégrale en deux termes, l'intégration du terme "impair" donnant zéro, l'amplitude totale est donnée par :

$$\frac{a(\vec{u})}{a_o} = a^*(m) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+1} \sqrt{1 - x^{*2}} \times cos(m \times x^*)dx^* \quad \text{avec} \quad m = \frac{2\pi}{\lambda} \times R\alpha$$

L'anlayse mathématique montre que cette amplitude est directement liée à la fonction de Bessel du premier ordre $J_1(m)$, notée $BesselJ(1, m)$

$$a^*(m) = 2 \times \frac{J_1(m)}{m}$$



On constate que le premier zéro de diffraction se situe en m = 3,83.. comme donné dans l'énoncé cité.

Cette valeur est importante car elle correspond à la limitation du pouvoir séparateur d'une lunette en raison de la diffraction par l'objectif. Calculons le paramètre α associé à ce premier zéro :

$$\alpha_o = \frac{m_o}{2\pi} \times \frac{\lambda}{R} = 0,61 \times \frac{\lambda}{R}$$

A.N.: pour $R = 10\,cm ; \lambda = 0,6\mu m$ on trouve $\alpha_o = 3,66.10^{-6}\,rd\,(\ll 1)$

D'après le critère proposé (Critère de Rayleigh) il s'agit de la limite de séparation angulaire imposée par la diffraction :

$$\alpha_o = \varepsilon_m = 3{,}66.10^{-6}\,rd = 0{,}75''$$

Dans le plan focal d'un objectif de focale f , on obtient une séparation linéaire :

$$\delta_m = f \times \varepsilon_m = 0{,}61 \times \lambda \times \frac{f}{R} = 1{,}22 \times \lambda \times O_n$$

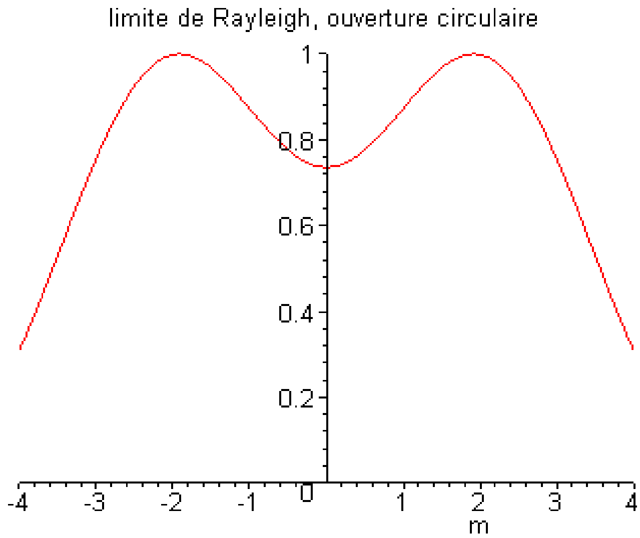
$$O_n = \frac{f}{2R} = \frac{f}{D} \text{ ouverture numérique de l'objectif}$$

Pour un objectif de focale f = 60 cm , on obtient : $O_n = 3 ; \delta_m = 2{,}2\,\mu m$

Visualisation du critère de Rayleigh

Traçons le graphe d'intensité associées à deux étoiles tout justes séparées.

Il faut sommer les intensités (sources incohérentes) cad les carrés des amplitudes avec un décalage $\Delta m = 3{,}83$



5 Réseau de diffraction

Un réseau est constitué d'un nombre N élevé de fentes diffractantes identiques, parallèles et équidistantes. Soient e la largeur de chaque fente , a la distance entre fentes successives et donc $L = N \times e$ Valeurs typiques :

$e = 0{,}8\,\mu m ; a = 2\,\mu m ; L = 20\,mm \Rightarrow N = 10\,000$ traits.

Soit une onde incidente, plane, monochromatique $\lambda = 0{,}6\,\mu m$ atteignant ce réseau sous incidence normale. On étudie la diffraction à l'infini (Fraunhofer) sous un angle θ. Les notations sont essentiellement les mêmes que pour la fente unique vue précedemment.

On constate que dans ces conditions, chaque fente diffracte largement la lumière.

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{e}\right) \approx 49^\circ$$

Les N fentes constituent des sources secondaires cohérentes. Sommons à nouveau leurs amplitudes complexes, en prenant comme origine la première fente :

$$\underline{A}_1 = \frac{\sin(\pi\, e\, \sin(\theta)/\lambda)}{\pi\, e\, \sin(\theta)/\lambda}$$

L'amplitude complexe $\underline{A}_2$ de la seconde fente diffère de $\underline{A}_1$ uniquement par son argument, puisque, l'onde, toujours dans la direction θ subit une différence de marche liée à la translation a :

$$\delta' = a \sin(\theta) \Rightarrow \varphi' = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin(\theta) \Rightarrow \underline{A}_2 = \underline{A}_1 \times \exp(i\varphi')$$

Pour l'ensemble des N fentes :

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^{N} \underline{A}_i = \frac{\sin(\pi\, e\, \sin(\theta)/\lambda)}{\pi\, e\, \sin(\theta)/\lambda} \times [1 + \exp(i\varphi') + \exp(i2\varphi') + \dots + \exp(i(N-1)\varphi')]$$

La série géométrique se calcule classiquement :

$$[1 + \dots + \exp(i(N-1)\varphi')] = \frac{1 - \exp(iN\varphi')}{1 - \exp(i\varphi')} = \exp\left(i\frac{N-1}{2}\varphi'\right)\frac{\sin(N\varphi'/2)}{\sin(\varphi'/2)}$$

Le carré du module de $\underline{A}$ donne l'intensité observée :

$$I = Cste \times \left(\frac{\sin(\pi\, e \sin(\theta)/\lambda)}{\pi\, e \sin(\theta)/\lambda} \right)^2 \times \left(\frac{\sin(N\varphi'/2)}{\sin(\varphi'/2)} \right)^2$$

En prenant comme unité d'intensité , celle observée pour $\theta = 0$ (déviation nulle, ordre zéro) et en remplaçant φ' par son expression, on trouve :

$$I = \left(\frac{\sin(\pi\, e \sin(\theta)/\lambda)}{\pi\, e \sin(\theta)/\lambda} \right)^2 \times \left(\frac{\sin(N\pi a \sin(\theta)/\lambda)}{N \times \sin(\pi a \sin(\theta)/\lambda)} \right)^2$$

Plus simplement, l'intensité est le produit de deux facteur, le premier lié à la diffraction par chaque fente et le second, spécifique au réseau correspondant à une interférence à N sources appelé **fonction réseau** *R*. En introduisant l'ordre d'interférence p entre deux fentes successives :

$$p = \frac{\delta'}{\lambda} = \frac{a \sin(\theta)}{\lambda}$$

la fonction réseau s'écrit :

$$R(p) = \left(\frac{\sin(N\pi p)}{N \sin(\pi p)} \right)^2$$

Cette fonction est périodique (période unité) elle est maximale (valeur 1) pour toute valeur entière de p. Elle présente des pics d'autant plus étroits au voisinage de p entier que N est élevé. Le pic principal d'interférence s'annule en effet pour $p = K \pm 1/N$ (K entier).

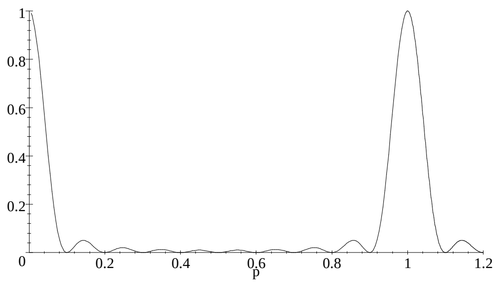
Exercices :

- Montrer que l'on retrouve la loi d'intensité des trous de Young pour N = 2
- Calculer la valeur approchée de R(p) au niveau du premier maximum secondaire

$$\textbf{Rép} \ : \ R \approx \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \approx 0,045$$

Aspect de la fonction R(p) pour N = 10

$$\left(\frac{\sin(10\pi \times p)}{10 \times \sin(\pi p)} \right)^2$$



Résumé

Dans un réseau de diffraction on distingue trois longueurs caractéristiques :

- La largeur e de chaque fente diffractante qui détermine l'extension de la région observable : demi-largeur du pic principal de diffraction $\theta_1 = \arcsin(\lambda/e)$
- La distance a entre fentes qui détermine l'orientation des différents **ordres** de diffraction :

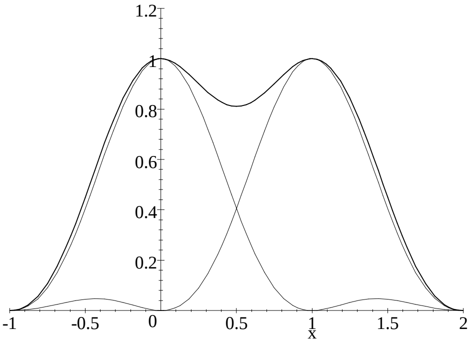
$$\sin(\theta_p) = p\frac{\lambda}{a}$$

- La largeur totale du réseau $L \approx Na$ qui détermine la demi-largeur des pics principaux d'interférence et le pouvoir séparateur du réseau :

$$\delta\theta = \arcsin(\lambda/L) \approx \lambda/L$$

Pouvoir de résolution du réseau

Ce dernier angle $\delta\theta$ détermine le pouvoir de résolution du réseau.On admet en effet que si deux raies spectrales présentent leurs pics de diffraction à des distances angulaires supérieures à $\delta\theta$ elles sont visibles séparément. (**Critère de Rayleigh**). On illustre ce cas limite, tel que le maximum du pic de diffraction d'une raie se trouve exactement au niveau du premier zéro de diffraction de l'autre raie.



A.N.: Considérons le réseau défini initialement : $e = 0,8\,\mu m$; $a = 2\,\mu m$; $L = 20\,mm \Rightarrow N \approx 10\,000$ traits.

On observe une raie spectrale $\lambda = 0,589\,\mu m$ dans le second ordre ($p = 2$)

D'après $\sin(\theta) = \lambda p/a$, on calcule : $\theta(p = 2) = 36,086^\circ$

Soit une raie voisine $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, dans la même direction son ordre d'interférence sera légèrement différent , en utilisant la différentielle logarithmique :

$$\lambda p/a = Cste \Rightarrow \frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta p}{p}$$

D'après le critère de Rayleigh on a $\delta p_{\lim} = 1/N$ (variation de p correspondant au premier zéro du pic de diffraction). On en déduit le **pouvoir de résolution du réseau** :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{p}{\delta p} = Np \; ; \; A.N. : \; R = 20\,000 \, ; \, \delta\lambda = 0,03\,nm$$

Angulairement, le pic de diffraction pour λ' est situé en $\theta' = 36,08816^\circ$

L'écart angulaire est très faible, par le calcul différentiel (cette fois $p = 2 = Cste$)

$$\cos(\theta)\delta\theta = \frac{p}{a}\delta\lambda \to \delta\theta = 3,7.10^{-5} rad = 8''$$

Remarquons que pour atteindre réellement cette limite de diffraction, il faut travailler avec une fente source de spectroscope très fine : soit un collimateur constitué d'une lentille de focale $f = 300 mm$, on calcule une largeur maximale de fente source égale à $\delta\theta \times f = 11\,\mu m$!

Minimum de déviation du réseau

La formule fondamentale du réseau, reliant la direction d'observation θ à l'ordre p pour une onde λ sous incidence normale est :

$$\sin(\theta_p) = p\frac{\lambda}{a}$$

Si l'angle d'incidence θ_1 n'est plus nul, on généralise facilement cette formule :

$$\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) = p\frac{\lambda}{a}$$

En remplaçant, par souci de symétrie la notation θ_p par θ_2 (direction d'émergence).

Les angles θ_1 et θ_2 étant mesurés algébriquement, la déviation vaut :

$$D = \theta_2 - \theta_1$$

Faisons varier θ_1 et suivons le faisceau diffracté (p et λ ne varient pas), en différençiant :

$$\cos(\theta_2)d\theta_2 - \cos(\theta_1)d\theta_1 = 0$$

Or au minimum de déviation on a :

$$dD = 0 \Rightarrow d\theta_2 = d\theta_1 \Rightarrow \cos(\theta_2) = \cos(\theta_1)$$

Si l'on rejette la solution $\theta_2 = \theta_1$ (pas de déviation, ordre zéro sans intérêt) , on trouve :

$$\theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow D_m = 2\theta_2 = 2 \times \arcsin(\frac{p\lambda}{2a})$$

Une mesure de minimum de déviation permet une mesure absolue de longueur d'onde.

A.N.: avec le réseau défini précédemment on mesure pour une raie orangée du sodium $D = 34^\circ 17' \pm 1'$. Dans quel ordre s'est fait l'observation, calculer la longueur d'onde et l'incertitude attachée à la précision angulaire.

Rép.: $p = 2$; $\lambda = 0,58947\,\mu m \pm 3.10^{-4}\,\mu m$