

## THERMODYNAMIQUE

### Écoulement d'un gaz dans une canalisation.

L'objet de ce problème est d'étudier certains aspects de l'écoulement d'un fluide compressible dans une canalisation. Aucune connaissance de mécanique des fluides ou sur les courbes de Fanno ne sont requises pour résoudre ce problème.

#### I) Préliminaires.

On considère un gaz en écoulement dans une canalisation calorifugée, de révolution autour de l'axe  $Ox$ , de section droite  $S(x)$ , fonction de  $x$ . On affecte à l'axe  $Ox$  le vecteur unitaire  $e_x$ .

On suppose que :

- La canalisation est parfaitement calorifugée : l'écoulement du gaz est adiabatique.
- La canalisation est fixe.
- Le régime est stationnaire (permanent).
- L'écoulement est unidimensionnel : la vitesse du gaz est parallèle à l'axe  $Ox$  :  $c = c \cdot e_x$  et les variables d'état intensives du gaz ne dépendent que de  $x$ .
- On note respectivement  $h$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $T$ , l'enthalpie massique, l'entropie massique, la vitesse d'écoulement, la masse volumique, le volume massique, la température en tous points d'une section droite de la canalisation.
- Le gaz a les propriétés d'un gaz parfait, dont les capacités thermiques massiques à pression constante,  $c_p$ , et à volume constant,  $c_v$ , sont constantes. On note  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .
- On néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur dans tout le problème.
- On note  $r = R / M$  où  $R$  est la constante universelle des gaz parfaits et  $M$  la masse molaire du gaz en écoulement.

I-1) Montrer que le débit massique  $q_m$  à travers la section d'abscisse  $x$ , orientée dans le même sens que le vecteur  $e_x$  est donné par :  $q_m = \mu \cdot c \cdot S$  où  $c$  et  $\mu$  sont respectivement la composante sur  $u_x$  de la vitesse du gaz et la masse volumique du gaz en tout point de cette section.

Quelle propriété vérifie le débit massique  $q_m$  le long de la canalisation ? (On demande de démontrer cette propriété.)

I-2) Montrer qu'une fonction de  $h$  et de  $c$  se conserve au cours de l'écoulement.

#### II) Tuyère simple isentropique.

On envisage une tuyère simple : il s'agit d'une canalisation calorifugée, de révolution autour de l'axe  $Ox$ , de section  $S$  diminuant progressivement jusqu'à son extrémité : le col.

Au col, la section est minimale, (et le profil de la tuyère est parallèle à l'axe  $Ox$ ). On considère encore que l'écoulement du gaz (parfait) est quasi - unidimensionnel : la vitesse du gaz est parallèle à l'axe  $Ox$  et les variables d'état intensives du gaz ne dépendent que de  $x$ .

On admet en outre que l'écoulement est isentropique.

Les conditions à l'entrée ( $x = 0$ ) sont : pression  $P_e$ , température  $T_e$ , la vitesse  $c_e$  étant nulle.

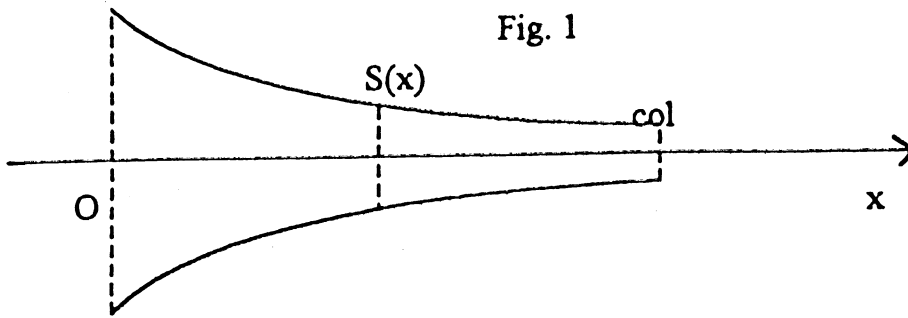


Fig. 1

II-1) Soient  $c$ ,  $T$  et  $P$  la vitesse, la température et la pression en tous points d'une section de la tuyère. Exprimer  $c$  en fonction de  $c_p$ ,  $\gamma$ ,  $P$ ,  $T$  et  $P_0$ .

On définit le nombre de Mach,  $Ma$ , comme  $Ma = \frac{c}{a}$  où  $a$  est la vitesse « locale » du son, c'est à dire la vitesse du son à la température  $T$  existant au niveau de la section de l'écoulement. On admettra que  $a = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$

Exprimer  $Ma$  en fonction de  $\gamma$ ,  $P$  et  $P_0$ .

II-2) Calculer la pression  $P_L$  au niveau du col de la tuyère si le nombre de Mach  $Ma$  y est égal à 1. Calculer alors la température  $T_L$  au niveau du col.

Calculer numériquement  $P_L/P_0$  et  $T_L/T_0$  si  $\gamma = 1,4$ .

II-3) La tuyère est reliée par son col à un réservoir où règne une pression uniforme  $P_2$  égale à la pression au niveau du col.

II-3-a) Exprimer la vitesse  $c_2$  au niveau du col en fonction de  $c_p$ ,  $\gamma$ ,  $T_0$ ,  $P_2$  et  $P_0$ .

Si on admet que la pression  $P_2$  peut devenir nulle, exprimer alors la vitesse limite  $c_{max}$  atteinte par le gaz au niveau du col. Calculer  $c_{max}$  si  $T_0 = 300$  K,  $c_p = 1000$  kJ.K<sup>-1</sup>.kg<sup>-1</sup>.

II-3-b) Comment varie  $c_{max}$  avec la masse molaire  $M$  du gaz. Voyez vous une justification du choix des carburants utilisés dans les moteurs-fusées ?

II-4) On note  $S_2$  la section de la tuyère au col.

Exprimer le débit massique  $q_m$  en fonction de  $r$ ,  $\gamma$ ,  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $S_2$  et  $P_2$ .

Calculer  $P_2/P_0$  et la valeur de  $Ma$  au col si le débit y est maximal. Commenter.

### III) Courbes de Fanno.

Dans cette partie du problème, on envisage dans un cas simple la construction et l'utilisation des réseaux de courbes de Fanno, au moyen desquels on peut résoudre des problèmes concrets plus complexes que celui posé dans la partie précédente.

On considère un gaz parfait en écoulement dans une canalisation parfaitement calorifugée, cylindrique, dont la génératrice est parallèle à un axe  $Ox$  horizontal auquel on affecte le vecteur unitaire  $e_x$ . Soit  $S$  l'aire constante de la section. On notera  $v$  le volume massique du fluide.

III-1) Soit  $q$  le débit massique par unité de surface :  $q = \frac{q_m}{S}$ . Montrer qu'en tout point de l'écoulement,  $T + \frac{q^2 v^2}{2 \cdot c_p}$  garde la même valeur, que l'on notera  $T_c$ .

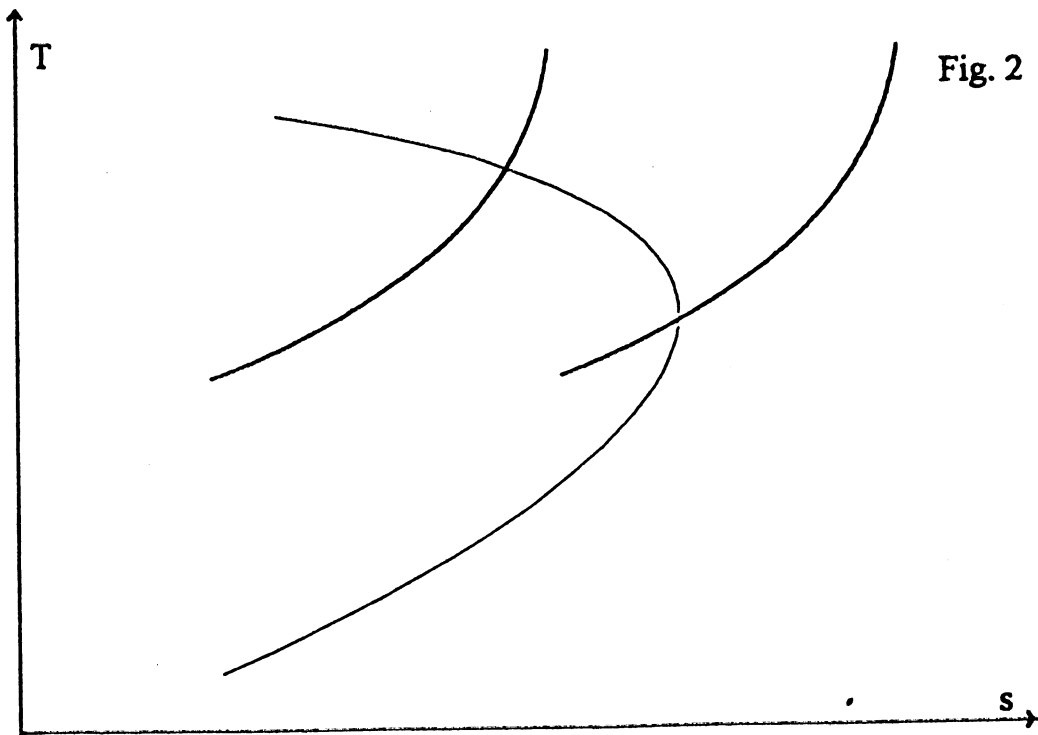
III-2) Exprimer l'entropie massique  $s(T,P)$ .

On pose  $k = s(T_0, P_0) - c_p \cdot \ln T_0 + r \cdot \ln P_0$ , où  $s(T_0, P_0)$  est l'entropie massique pour un état caractérisé par des valeurs  $P_0$  et  $T_0$  de la pression et de la température.

III-3) Exprimer  $s$ , fonction de  $T$ ,  $T_c$ ,  $q$ ,  $c_p$ ,  $k$  et  $r$ .

III-4) Au type d'écoulement étudié dans ce problème, on associe un réseau de courbes dans le diagramme  $T, s$ , correspondant à une valeur donnée de  $T_c$  et des valeurs différentes du débit surfacique  $q$ . Ce sont les courbes de Fanno.

On représente sur la figure (2) l'allure dans le diagramme  $T, s$  d'une des courbes de Fanno, correspondant à des valeurs données respectives de  $T_c$  et de  $q$  ainsi que l'allure de deux isobares.



Quelle est l'équation de l'asymptote supérieure de la courbe de Fanno ? Commenter.

III-5) On considère deux courbes de Fanno, correspondant à deux écoulements d'un même gaz pour lesquels  $T_c$  a même valeur et pour lesquels les débits massiques par unité de surface sont  $q_1$  et  $q_2$  respectivement. Montrer comment une des courbes de Fanno peut se déduire géométriquement de l'autre.

III-6) Montrer qu'une courbe de Fanno caractérisée par la donnée de  $T_C$  et  $q$ , possède une tangente verticale en un point L. Calculer la température  $T_L$  au point L en fonction de  $T_C$  et  $\gamma$ , et commenter le résultat obtenu. Exprimer la vitesse  $c_L$  en L, en fonction  $r$ ,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  et de  $T_L$ .

Que peut-on dire de la valeur de  $T_L$  pour les écoulements caractérisés par la même valeur de  $T_C$  et des valeurs de  $q$  différentes ?

III-7) Donner l'allure du réseau des courbes de Fanno dans le diagramme  $T,s$ . Commenter.

III-8) On considère un écoulement dans une canalisation parfaitement calorifugée vérifiant les hypothèses du problème. Au niveau de la section d'entrée de la canalisation, notée section 1, la pression est  $P_1$ , la température  $T_1$  et la vitesse  $c_1$ . On rappelle que la section  $S$  de la canalisation est uniforme.

8-a) Montrer que ces données déterminent complètement la courbe de Fanno qui va être décrite par le fluide lors de son écoulement dans la canalisation.

8-b) On envisage un écoulement depuis la section 1 jusqu'à la section de sortie où la pression est  $P_2$ .  
On suppose  $T_1 > T_L$ . Montrer que  $c_1 < c_L$ . (L'écoulement est dit subsonique).

8-c) Quelle est la variable intensive du gaz qui doit nécessairement augmenter au cours de l'écoulement ?

En déduire le sens de variation des autres paramètres intensifs du gaz au cours de l'écoulement.

Si on diminue la pression  $P_2$ , montrer que la vitesse du gaz ne peut dépasser une valeur maximale. Quelle est cette valeur maximale ?

III-9) Reprendre les questions 8-b et 8-c en supposant maintenant que  $T_1 < T_L$ .

III-10) Commenter les résultats précédents.

III-11) Pourrait-on utiliser un réseau de courbes de Fanno pour étudier l'écoulement d'un fluide dans une canalisation calorifugée à section non constante ? Argumenter la réponse au plus en cinq lignes.