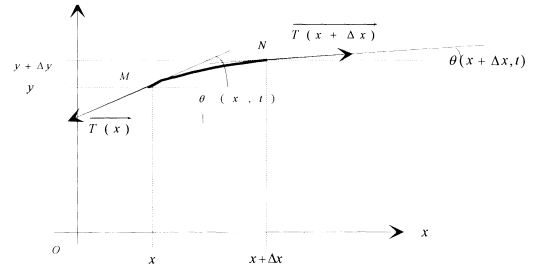


BANQUE PT 99 - EPREUVE I-B

1. Corde vibrante

1.1. Equation d'onde d'élongation de la corde



1.1.1. Forces appliquées à MN en négligeant le poids :

$$\vec{F} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \Delta x)$$

1.1.2. $dm = \mu \cdot dx$ et $\ddot{y} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

1.1.3. $dm \cdot \ddot{y} \cdot \vec{j} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \Delta x)$ avec \vec{j} = vecteur unitaire de Oy.

En projection sur Oy :

$$dm \cdot \ddot{y} = -T(x) \cdot \sin \theta(x, t) + T(x + \Delta x) \cdot \sin \theta(x + \Delta x, t) \Rightarrow dm \cdot \ddot{y} = d[(T(x) \sin(\theta(x, t)))]$$

1.1.4. $\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

1.1.5. D'après 1.1.3. :

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot T \cdot d(\sin \theta) = T \cdot \cos \theta \cdot d\theta \Rightarrow \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot T \cdot d(\sin \theta) = T \cdot \cos \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot dx = T \cdot \cos^3 \theta \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

Au 1^{er} ordre $\cos \theta = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ Donc $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

v = vitesse de propagation des ondes élastiques dans la corde.

1.1.6. A.N. $\mu = 22,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ et $v = 364 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1.2. Recherche des solutions en ondes stationnaires

1.2.1. $y(x, t) = a_1 \cdot a_2 \cdot \sin(k \cdot x + \phi_1) \cdot \sin(\omega t + \phi_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 \cdot y$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot y$

En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient : $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ ou $k = \pm \frac{\omega}{v}$

1.2.2. Les points extrêmes de la corde ont une élongation nulle à tout instant \Rightarrow

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \text{ Par conséquent : } f(0) = 0 ; f(L) = 0$$

1.2.3. D'après ces résultats, on peut écrire :

$$\sin(\phi_1) = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0 \text{ et } \sin(kL + \phi_1) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

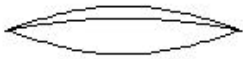
On en déduit : $\frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}$ ou $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ $\lambda_n =$ longueur d'onde du mouvement vibratoire

1.2.4. En norme $k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow \omega = kv$ ou $\omega_n = n \frac{\pi v}{L}$

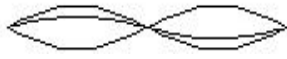
1.2.5. $y_n(x, t) = A \cdot \sin\left(n \pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(n \pi \frac{vt}{L} + \phi\right)$

Les aspects de la corde pour le fondamental et les 3 premiers harmoniques sont représentés ci-après.

-2-



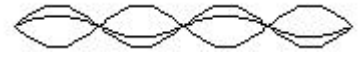
n=1



n=2



n=3



n=4

1.2.6. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique

1.2.6.1. $\omega = \frac{\pi v}{L} \Rightarrow 2\pi f = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec $\mu = \rho \pi \frac{d^2}{4}$ soit $T = \pi \rho d^2 L^2 f_1^2$

Corde n°	1	2	3	4	5	6
T(N)	83	93	103	113	73	66

1.2.6.2 De la relation précédente, on tire : $\frac{dT}{T} = 2 \frac{df}{f} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta f}{f} = 2\%$

Avec les valeurs précédentes $\Delta T \approx 2N$

1.2.6.3. De la relation $T = \pi \rho d^2 L^2 f_1^2$, on tire : $0 = 2 \frac{dL}{L} + 2 \frac{df}{f}$ ou $\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta f}{f} \Rightarrow \Delta L = L \cdot \frac{\Delta f}{f} \Rightarrow \Delta L = 10^{-2} L$

On calcule la longueur L de la corde pour les fréquences de 500 Hz et 1 kHz.

Avec T = cte, on a $L^2 f^2 = cte \Rightarrow Lf = cte \Rightarrow L = L_1 \frac{f}{f_1} \Rightarrow$

f ₁ (Hz)	L ₁ (mm)	ΔL ₁ (mm)
500	416	4
1000	208	2

La précision avec laquelle le guitariste doit placer son doigt est inversement proportionnelle à la fréquence du son à produire.

A priori, cette précision semble être difficilement supérieure à 0,5 mm.

On peut en conclure qu'il est difficile d'émettre un son juste de fréquence supérieure à 4000 Hz.

1.3 Aspect énergétique

1.3.1. Pour MN $dE_c = \frac{1}{2} \mu \cdot dx \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 dx$

1.3.2. $\frac{\partial y_n}{\partial t} = A_n \cdot \omega_n \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t + \phi_n)$ et $E_c = \frac{1}{2} \mu A_n^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \int_0^L \sin^2(k_n x) dx$

L'intégrale est égale à et $E_c = \frac{L}{4} \mu A_n^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \cos^2(\omega_n t + \phi_n)$

On en déduit : $C_1 = \frac{1}{4} \mu L \omega_n^2 \Rightarrow C_1 = \frac{n^2 \pi^2 T}{4 L}$

1.3.3. D'après la figure 1 : $\Delta x = MN \cdot \cos \theta \Rightarrow MN = \frac{\Delta x}{\cos \theta} \approx \Delta x \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^{-1}$ soit $MN = \Delta x \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right)$

Au repos, la longueur de MN est Δx et par conséquent l'allongement d(MN) vaut : $d(MN) = \frac{1}{2} \theta^2 \cdot dx$

Or, $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \theta$. Donc, au second ordre près, $\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $d(MN) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \cdot dx$

1.3.4. On en déduit immédiatement : $\Delta L = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \cdot dx$

-3-

1.3.5. On exprime $\frac{\partial y}{\partial x} = A_n k_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$ puis $\Delta L = \frac{1}{2} A_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \int_0^L \sin^2(k_n x) dx$

L'intégrale est égale à $\frac{L}{2} \Rightarrow \Delta L = \frac{1}{4} A_n^2 k_n^2 L \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)$

On prend l'origine de l'énergie potentielle lorsque $\Delta L = 0$ et on appelle m la masse qui tend la corde.

Alors $E_p = mg \Delta L = T \Delta L$ car la corde est sans masse.

Finalement : $E_p = \frac{1}{4} A_n^2 k_n^2 T L \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)$ et $C_2 = \frac{1}{4} k_n^2 T L \Rightarrow C_2 = \frac{n^2 \pi^2 T}{4 L}$

1.3.6. Energie mécanique totale : $E_n = E_c + E_p \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 T}{4L} A_n^2$ et $K_n = \frac{n^2 \pi^2}{4L}$

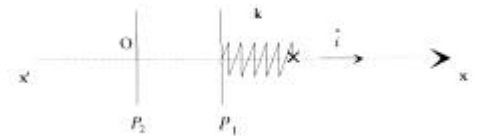
1.3.7. La solution générale est une combinaison linéaire des divers modes de vibration.

Donc : $E_{\text{totale}} = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2$

Les coefficients A_n dépendent des conditions initiales, donc de la manière dont le guitariste frappe ou pince la corde.

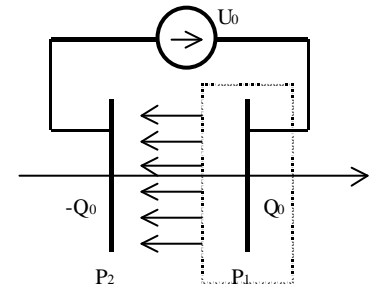
2. Microphone électrostatique

2.1. Etude statique du condensateur



2.1.1. L'armature P₁ porte la charge Q₀, l'armature P₂ la charge -Q₀ et le champ électrique est dirigé selon xx'.

2.1.2. On applique le théorème de Gauss à une surface fermée telle que celle dessinée en pointillée sur le schéma..



Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{S}$

2.1.3. $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow V = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{S} x$ car E = cte.

2.1.4. La capacité est définie par $Q_0 = C_0 \cdot V \Rightarrow C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{X_0}$

2.1.5. La pression électrostatique sur une armature est $p_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ avec $\sigma = \frac{Q_0}{S}$ et $f_0 = p_e \cdot S$

Soit : $f_0 = -\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 S}$ et $Q_0 = \epsilon_0 \frac{S}{X_0} U_0 \Rightarrow f_0 = -\frac{\epsilon_0 S U_0^2}{2 X_0}$

2.1.6. A.N. $f_0 = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ $C_0 = 0,44 \text{ nF}$

C₀ est du même ordre de grandeur que les valeurs des capacités usuelles du laboratoire (1µF ≤ C ≤ 1pF)

Pour avoir 1 µF, on utilise un diélectrique de permittivité ε_r ≥ 1.

2.1.7. A présent : $X = X_0 + x$ et $Q = Q_0 + q \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{S}{X_0 \left(1 + \frac{x}{X_0}\right)}$ et $U = \frac{Q}{C} = Q_0 \left(1 + \frac{q}{Q_0}\right) \frac{X_0}{\epsilon_0 S}$

Par un développement limité à l'ordre 1, on obtient :

-4-

$$C = C_0 \left(1 - \frac{x}{X_0} \right) \quad \text{et} \quad U = U_0 \left(1 + \frac{q}{Q_0} + \frac{x}{X_0} \right)$$

$$\text{En outre } \vec{f} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \vec{i} = -\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 S} \left(1 + \frac{q}{Q_0} \right)^2 \vec{i} \quad \text{soit : } \vec{f} = f_0 \left(1 + 2 \frac{q}{Q_0} \right) \vec{i}$$

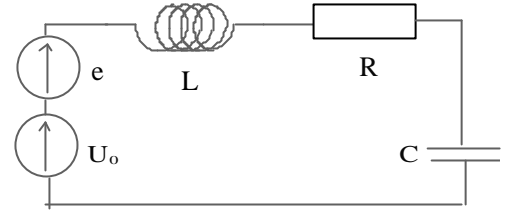
2.2. Etude du circuit électrique

2.2.1. La loi d'Ohm appliquée au circuit donne :

$$U_0 + e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\text{Or, } \frac{Q}{C} = \frac{Q_0 \left(1 + \frac{q}{Q_0} \right)}{C_0 \left(1 - \frac{x}{X_0} \right)} = \frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{q}{Q_0} + \frac{x}{X_0} \right) \quad \text{avec } \frac{Q_0}{C_0} = U_0$$

$$\text{Finalement : } e = Ri + L \frac{di}{dt} + U_0 \left(\frac{q}{Q_0} + \frac{x}{X_0} \right)$$



2.2.2. PFD $\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -f_0 \left(1 + 2 \frac{q}{Q_0} \right) - r \cdot \dot{x} + f_e - k(x + \delta)$ avec $\delta =$ allongement du ressort lorsque $q=0$ et le système à l'équilibre. Donc : $-f_0 + k \delta = 0$

$$\text{D'où : } m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = f_e - 2f_0 \frac{q}{Q_0}$$

2.2.3. Avec i et v sinusoïdales on : $q = \frac{i}{j\omega}$ et $x = \frac{v}{j\omega}$. Soit :

$$e = Ri + jL \omega i + \frac{U_0}{Q_0} \frac{i}{j\omega} + \frac{U_0}{X_0} \frac{v}{j\omega} \quad \text{et} \quad jm \cdot \omega v + r v + k \frac{v}{j\omega} = f_e - 2f_0 \frac{i}{j\omega Q_0}$$

$$\text{on pose } \underline{Z} = \underline{a} = R + j \left(L \omega - \frac{1}{C_0 \omega} \right); \quad \underline{b} = -j \frac{U_0}{\omega X_0}; \quad \underline{c} = -j \frac{2f_0}{\omega Q_0}; \quad \underline{d} = r + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)$$

$$\text{Alors : } \underline{e} = \underline{a} \cdot i + \underline{b} \cdot v \quad \text{et} \quad \underline{f}_e = \underline{c} \cdot i + \underline{d} \cdot v$$

2.3. Etude du système en microphone

2.3.1. Des relations précédentes, on tire : $f_e = \left(\underline{c} - \underline{d} \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \right) i \Rightarrow \underline{f}_e = - \left(\frac{\underline{a} - \underline{c} \frac{\underline{b}}{\underline{d}}}{\underline{b}} \right) d \cdot i$ avec $\underline{a} = \underline{Z}$

On obtient une expression de la forme $f_e = -(\underline{Z} - \underline{Z}_m) i \cdot g$ avec :

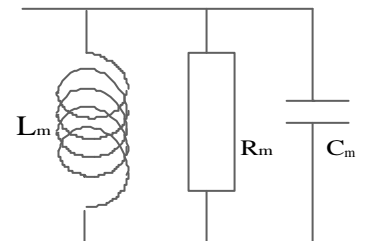
$$\underline{Z}_m = \frac{2f_0 U_0}{Q_0 X_0 \omega^2 \left[r + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right) \right]} \quad \text{et} \quad \underline{g} = \frac{X_0 \omega}{U_0} \left[\left(\frac{k}{\omega} - m \omega \right) + jr \right]$$

2.3.2. L'impédance \underline{Z}_m est équivalente à un circuit RLC parallèle, avec :

$$\underline{R}_m = \frac{2f_0 U_0 r}{Q_0 X_0 \omega^2} \quad \underline{C}_m = \frac{Q_0 X_0 m \omega^3}{2f_0 U_0} \quad \underline{L}_m = \frac{2f_0 U_0}{k Q_0 X_0 \omega}$$

Or, $\frac{f_0}{Q_0} = \frac{Q_0}{2\epsilon_0 S} = \frac{C_0 U_0}{2\epsilon_0 S} = \frac{U_0}{2X_0}$. Soit finalement :

$$\underline{R}_m = \frac{r \cdot U_0^2}{X_0^2 \omega^2} \quad \underline{C}_m = \frac{m \cdot \omega^3 X_0^2}{U_0^2} \quad \underline{L}_m = \frac{U_0^2}{k \cdot \omega X_0^2}$$



3. Traitement du signal électrique : filtrage

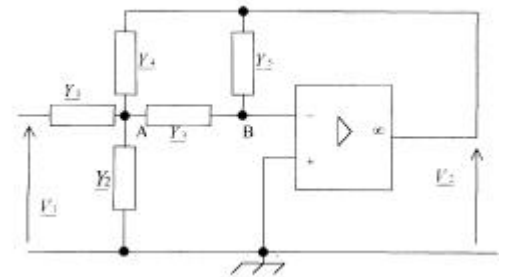
3.1. D'après le schéma du montage : $V_B = V_{\pm} = V_i = 0$

En A : $Y_1(V_A - V_1) + Y_2(V_A - 0) + Y_3(V_A - 0) + Y_4(V_A - V_2) = 0$

En B : $Y_3(V_A - 0) + Y_5(V_2 - 0) = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{Y_5}{Y_3}V_2$

D'où : $V_2 \left[Y_4 + \frac{Y_5}{Y_3}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \right] = -Y_1 V_1$

$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$ donc : $S = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$



3.2. Etude du filtre passe-bas

On prend $Y_1 = Y_3 = Y_4 = \frac{1}{R}$ $Y_2 = jC_2 \omega$ $Y_5 = jC_1 \omega$

3.2.1. La fonction de transfert s'écrit : $T = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + jC_1 \omega \left(\frac{3}{R} + jC_2 \omega \right)}$ ou $T = \frac{-1}{1 + jC_1 \omega R^2 \left(\frac{3}{R} + jC_2 \omega \right)}$

3.2.2. On veut que $T = \frac{A}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

Il est clair que $A = -1$

Les paramètres m et ω_0 vérifient les deux équations : $\frac{m}{\omega_0} = \frac{3}{2}RC_1$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = C_1 C_2 R^2$

La résolution de ce système conduit à : $m = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ (1) et $\omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}}$ (2)

3.2.3. A partir de ces deux relations, on calcule : $C_1 = \frac{2m}{3R \omega_0}$ et $C_2 = \frac{1}{C_1 \omega_0^2 R^2}$ soit $C_1 = \frac{3}{2mR \omega_0}$

3.2.4. En différentiant la relation (2), il vient :

$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C_1}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta C_2}{C_2}$ soit $\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = 5\%$

3.2.5. A.N. $C_1 = 3,8 \text{ nF}$ $C_2 = 17 \text{ nF}$

3.3. Expérimentation

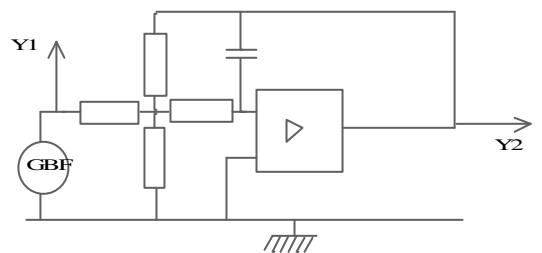
3.3.1. Le câblage est représenté sur le schéma ci-contre.

On prend différentes valeurs de la fréquence pour le signal fourni par le GBF. Pour chaque fréquence, on observe les deux sinusoïdes Y1 et Y2 sur l'écran de l'oscilloscope. A partir de ces deux sinusoïdes, on calcule le gain G et on mesure le déphasage ϕ .

Si le GBF possède la fonction wobulation, on peut directement obtenir à l'écran la courbe $T = f(N)$.

3.3.2. D'après le chronogramme, une période du signal correspond à 4 divisions.

Donc : $\frac{1}{N} (\mu s) = 4 \times 12,5$ soit $\frac{1}{N} = 50 \text{ s}$ et $N = 20 \text{ kHz}$



-6-

D'après l'expression de T de la question 3.3.2. on calcule

$$\underline{T} = \frac{1}{1+2j,0,707+j^2} = -0,707 j$$

Soit $|t| = 0,707$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Les courbes observées sur l'écran sont représentées ci-contre

3.3.3. On envoie en entrée du filtre un signal créneau de basse fréquence (par exemple 100 Hz); on récupère le signal de sortie que l'on analyse par FFT.

On peut imaginer que le signal d'entrée est la somme de signaux sinusoïdaux de la

$$\text{forme : } v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\text{En sortie : } v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{T}(n\omega) \frac{A}{n} \cdot \cos(n\omega t + \psi_n)$$

Comme l'indique l'énoncé, pour n suffisamment élevé, on peut considérer que

$\frac{A}{n} \approx \text{cte}$. Dans ces conditions, l'amplitude de l'harmonique n est proportionnel à $T(n\omega)$.

L'analyse par FFT donne un spectre de la forme ci-contre.

On peut considérer que la fonction de transfert (en échelle linéaire) est l'enveloppe du spectre de FFT.

