Ecoulement d'un gaz dans une canalisation

PT 97 IIB Corrigé

I 1 Conservation du débit massique dans un écoulement permanent (question de cours)

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \mu \times c \times S \quad (1)$$

On peut signaler que comme pour toute grandeur "débitée" dans un écoulement, le débit est le produit de la "grandeur spécifique ou volumique" , (ici la masse volumique) par le débit volumique $c \times S$ qui s'exprime en $m^3.s^{-1}$

I 2 Premier principe en écoulement :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q_e$$

Hyp.: écoulement adiabatique → $q_e = 0$; tuyère "fixe" (cad sans pièces mobiles) → $w_i = 0$
On néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur → $\Delta e_p = 0$ Finalement :

$$h + e_c = Cste \rightarrow h + \frac{c^2}{2} = Cste \quad (2)$$

II) **Tuyère simple isentropique**
lire dans les hypothèses énergie cinétique à l'entrée négligeable et non vitesse nulle ...

Gaz parfait à γ, c_p **fixés en écoulement isentropique** entraîne :

$$h = h(T) = c_p T + Cste$$
$$T = T_e \times \left(\frac{P}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \text{ Laplace} \rightarrow (2) \text{ devient :}$$
$$c = \sqrt{2c_p(T_e - T)} = \sqrt{2c_p T\left(\left(\frac{P_e}{P}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)}$$

Soit , la vitesse du son a et le nombre de Mach c/a :

$$a = \sqrt{\gamma r T} \rightarrow M_a = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2c_p}{\gamma r}\left(\left(\frac{P_e}{P}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{P_e}{P}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)}$$

II 2) Si l'on admet qu'au col, le nombre de Mach vaut 1 , on trouve facilement la pression et la température $(\gamma = 1,4)$:

$$\frac{P_L}{P_e} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 0,528$$
$$\frac{T_L}{T_e} = \frac{2}{1+\gamma} = 0,833$$

II 3) On nous demande de réécrire l'expression de c en conservant cette fois T_e et en remplaçant P par $P_2 = P_L$...

$$c = \sqrt{2c_p T_e\left(1 - \left(\frac{P_2}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)}$$

Si la pression et la température peuvent devenir nulles, on obtient :

$$c_{max} = \sqrt{2c_p T_e} \text{ ; A.N.: } c_{max} = 775\, m/s$$

La masse molaire du gaz intervient dans :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \times \frac{1}{M} \rightarrow c_{max} = \sqrt{2\,\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \times \frac{T_e}{M}}$$

On a donc intérêt à choisir M faible (moteurs fusée à hydrogène et oxygène liquide, donnant comme gaz de la vapeur d’eau

II 4 Question plutôt mal posée...

On cherche à rendre le débit maximum au ”col” de section fixée. il faudrait plutôt dire pour quel rapport de pressions $x = P_2/P_e$, le produit $j = \mu \times c$ est maximum puisque $q_m = \mu \times c \times S = j \times S$

Les questions précédentes ont permis d’écrire :

$$c = \sqrt{2\,c_p\,T_e(1 - x^{(\gamma-1)/\gamma})}$$

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{P}{P_e}\right)^{1/\gamma} = x^{1/\gamma} \quad \text{Laplace}$$

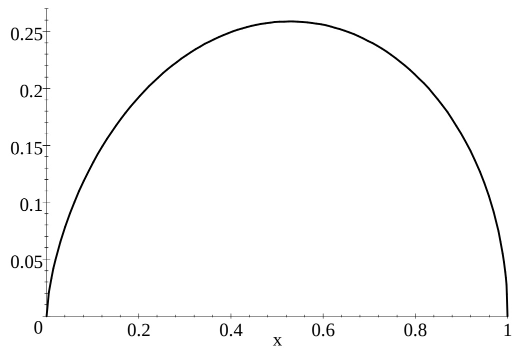
A une constante multiplicative près, on nous demande pour quelle valeur de x la fonction suivante est maximale :

$$f(x) = x^{1/\gamma} \times \sqrt{1 - x^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

Par dérivation (plutôt fastidieuse...) on trouve :

$$x_c = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$$

On peut s’en convaincre graphiquement en traçant la courbe $f(x)$, ici pour $\gamma = 1,4$



$x^{(1/1.4)} \times \sqrt{1 - x^{(1/3.5)}}$

On retrouve précisément le rapport obtenu en admettant que la vitesse atteinte est la vitesse du son !

Ce qu’il faudrait comprendre (mais ce n’est pas évident vu la succession des questions) c’est que c’est pour ce rapport de pression que la ”densité de courant” $j = \mu \times c$ est maximale et que donc, d’après la conservation du débit massique : $q_m = j \times S = Cste$ on passe par une section minimale (le fameux ”col” !!)

III **Courbes de Fano**

Questions délicates, dépassant de loin les ambitions classiques de la filière. Il s’agit d’un problème pointu de mécanique des fluides. Rappelons qu’en tête du sujet on rappelle sans rire : ”**aucune connaissance de mécanique des fluides n’est nécessaire**...”