PT 2008 Physique B Corrigé

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un "corrigé" mais plutôt d'un cours dont le sujet proposé constitue une application numérique. Les notations et les variables utilisées dans le cours s'éloignant (pour des raisons didactiques) assez fort de celles demandées au concours !

Boule électrostatique uniformément chargée

Charge totale Q, rayon R.

Champ $\vec{E}(M)$et potentiel $V(M)$créés en M distant de $r = OM$ de son centre O.

Soit la distance réduite $r^* = r/R$, d'après le théorème de Gauss, on obtient facilement :

$$E_r(M) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\right) r^* \text{ pour } r^* < 1$$

$$E_r(M) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\right) \frac{1}{r^{*2}} \text{ pour } r^* < 1$$

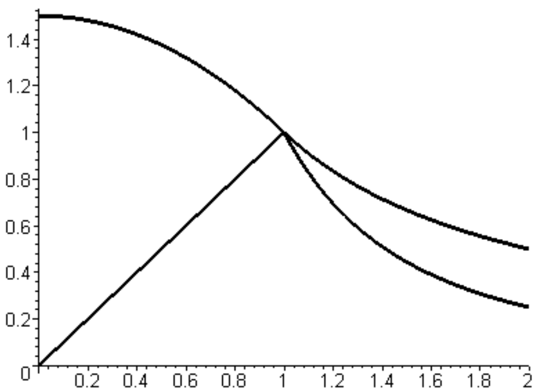
on en déduit V(r) par $dV = -\vec{E}.\vec{d\ell} = -E_r(r)dr = -R \times E_r(r^*)\, dr^*$

$$V(M) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\right) \frac{1}{r^*} \text{ pour } r^* > 1 \text{ avec } V \to 0 \text{ pour } r^* \to \infty$$

$$V(M) = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\right) \times \left(\frac{3 - r^{*2}}{2}\right) \text{ pour } r^* > 1 \text{ avec } V(r^* = 1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} \text{ continu}$$

Graphe de E_r et V en unités réduites (Valeur "unité" en $r/R = r^* = 1$)

On "visualise" que V(r) mesure (au signe près et à une constante près...) l'aire sous la courbe E(r)



Energie d'une charge ponctuelle q en M dans le champ de la boule :

On a ajouté l'indice p pour ne pas confondre une énergie E_{p1} avec un champ électrique ...

$$E_{p1} = q \times V(M) = \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o R}\right) \frac{1}{r^*} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r} \text{ pour } r^* > 1\,(r > R)$$

Energie propre de la boule chargée

$$u_e = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} \to dE_p = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} \times d\tau = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} \times 4\pi r^2 dr = R^3 \frac{\varepsilon_o E^2}{2} \times 4\pi r^{*2} dr^* \text{ (symétrie sphérique)}$$

En intégrant dans tout l'espace $r^* < 1$ et $r^* > 1$ on trouve :

$$E_{p2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R} \times \left(\int_0^1 r^{*4} dr^* + \int_1^\infty \frac{dr^*}{r^{*2}}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}$$

On pourrait vérifier (mais ce n'est plus au programme) que cette énergie propre peut se calculer "à la manière de" E_{p1} *mais avec un facteur* 1/2 :

$$E_{p2} = \frac{1}{2} \int_{Boule} V \times dq = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\right) \int_0^1 \times \left(\frac{3 - r^{*2}}{2}\right) dQ \text{ avec } dQ = \rho\, d\tau = Q \times 3r^{*2} dr^* \text{ (Justifiez!)}$$

Analogie Electrostatique - Gravitation

Soit la masse M en A soumise au champ de gravitation $\vec{g}(A)$ créé par m en O

$$\vec{F} = -\frac{Gm}{r^2} M\vec{u}_r = M \times \vec{g}(A) \quad \text{(signe - : attraction)}$$

$$m \Leftrightarrow q\,;\ -G \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$g(r) \Leftrightarrow E_r(r) \qquad \left(\frac{-GM}{R^2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\right)$$

Il est étrange de demander de calculer le champ de gravitation d'un astre " à la surface" d'un autre puisque les différents points de la surface ne sont pas équidistants de l'astre attracteur (effets de marée) nous considérerons les centres des astres ! (rayons $\ll$ distance mutuelle)

$$g_{ST} = \frac{GM_S}{L^2} = 5,93.10^{-3} m.s^{-2}\,;\ g_{TS} = \frac{GM_T}{L^2} = 1,78.10^{-8} m.s^{-2}$$

$$E_{pTS} = -\frac{GM_S M_T}{L} = -5,336.10^{33} J$$

$$E_{pS} = -\frac{3}{5} \times \frac{GM_S^2}{R_S} = -2,2810^{41} J\,;\ E_{pT} = -\frac{3}{5} \times \frac{GM_T^2}{R_T} = -2,25.10^{32} J$$

$$E_{totale} = E_{pTS} + E_{pS} + E_{pT} \approx E_{pS}$$

Calculs effectués en considérant ces astres comme homogènes ! Ces résultats montrent que la Terre ne "pèse" pas lourd devant le Soleil...

II Stabilité d'une étoile sphérique

II. 1Stabilité thermique

Energie totale : $E_S = E_{pS} + E_{cS}$

On suppose cette énergie totale négative pour que le système soit stable (cf énergie des planètes...)

$$E_{cS} = \frac{3}{2} kT * \frac{M_S}{M_H/N_a} = \frac{3}{2}\frac{M_S}{M_H} RT = \frac{3}{2} nRT = 2,49.10^{34} T$$

Cette énergie équilibre l'énergie potentielle pour Tmax :

$$T_{max} = \frac{-E_{pS}}{nR}\frac{2}{3} = 9,15.10^6 K$$

La température de surface du Soleil est de seulement 5 800 K (au coeur du Soleil la température est supérieure à T_{max} !)

II.2 Stabilité dynamique

Il faut que la vitesse de rotation à l'équateur reste inférieure à la vitesse de libération. Sinon de la matière s'échappe de l'étoile depuis cet équateur

Une autre façon de le dire est que la pesanteur (gravitation ET inertie d'entraînement) serait nulle à l'équateur

$$\text{Vitesse de libération : } \frac{1}{2} m v_L^2 = -E_p(R) = \frac{GmM}{R} \rightarrow v_L = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 617367\, m/s$$

$$\text{Vitesse de rotation "équatoriale" : } v_r = \omega R = \frac{2\pi}{\Theta_S} R_S = 1692\, m/s \quad \ll v_L \ \text{(pour le soleil)}$$

Rayon de Schwarzschild $(v_L = c)$, (horizon d'un trou noir) et masse volumique correspondante :

$$R_o = 2\frac{GM}{c^2} = 2964\, m\,\text{(Soleil)} \rightarrow \rho_o = \frac{3c^2}{8\pi R^2 G} = \frac{1,611.10^{26}}{R^2} \rightarrow \rho_o(R_S) = 3,28.10^8\, kg.m^{-3} = 328\, kg/cm^3 !!$$

Remarquons que ce calcul "classique" est confirmé dans la théorie de la relativité

La masse volumique moyenne du Soleil vaut "seulement" :

$$\rho_S = \frac{M_s}{(4/3)\pi R_S^3} = 1393\, kg.m^{-3}$$

II. 3 Aspect hydrostatique

$$\overrightarrow{Grad}(P) = \rho \vec{g} \to \frac{dP}{dr} = -\rho(r) \times \frac{G \times M(r)}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{-P_c}{R} \approx -\rho_S \times G \times \frac{2M_S}{R_S} \to P_c = \frac{3GM_S^2}{\pi R_S^4} = 5,3.10^{14} Pa \text{ ”Calculs” forts grossiers...}$$

$$T_c = \frac{P}{\rho_S \times r} \quad \text{avec } r = \frac{R}{M_H} = 8310\, J.K^{-1}.kg^{-1} \to T_c = \frac{2GM_S}{r\, R_S} = 4,58.10^7 K$$

III Evolution du Soleil

1 Puissance rayonnée :

$$P_S = p' \times 4\pi L^2 = 3,8.10^{26} W$$

2 Test de l’hypothèse : énergie produite par la contraction du Soleil :

$$P_S \times t_o = \frac{3}{5} \times \frac{GM_S^2}{R_S} \to t_o = \frac{2,2810^{41}}{3,8.10^{26}} = 6.10^{14} s = 19.10^6\, ans$$

Valeur beaucoup trop faible (19 millions d’années) devant l’âge estimé du Soleil (4 milliards d’années)
L’origine de l’énergie solaire est nucléaire : fusion de l’hydrogène en hélium
3 **Evolution en naine blanche**

$$\frac{4}{3}\pi R_{NB}^3 \times \rho = M_S \to R_{NB} = 1,684.10^7 m = 0,024 \times R_S$$

$$I \times \Omega = Cste \to \frac{R^2}{\Theta} = Cste : \text{ conservation du moment cinétique} \to \Theta_{NB} = \Theta_S \times \left(\frac{R_{NB}}{R_S}\right)^2 = 1505\, s$$

III 3.5. Reprenons le critère de stabilité dynamique, on trouve à la limite ($R = R_{min}$):

$$v_r = v_L \to \frac{2\pi R_{min}}{\Theta_S \times (R_{min}/R_S)^2} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{min}}}$$

$$\to R_{min} = \frac{2\pi^2 R_S^4}{GM_S\Theta_S^2} = 5,3\, km$$

Nous ne sommes plus très loin du rayon de Schwarzschild calculé en II 2 $(v_L = c)\, R_o = 2964\, m$

IV Lunette astronomique

Un critère très utile ici :

Depuis le centre optique d’une lentille mince plongée dans l’air : l’objet et l’image sont vus sous des angles égaux.

Si l’objet (l’image) est à l’infini de taille angulaire α, alors l’image (l’objet) est dans le plan focal de taille linéaire $h = f \times \alpha$

En considérant ici l’image intermédiaire située simultanément dans les plans focaux de l’objectif et de l’oculaire :

$$h = f_1 \times \alpha = f_2 \times \alpha' \to G := \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{Attention au renversement, en toute rigueur : } G = -\frac{f_1}{f_2}$$

Remarquons que le diamètre d’un faisceau cylindrique est au contraire réduit d’un facteur G

V Mesure d’une distance angulaire

Nombreuses questions de cours, donnons seulement les résultats essentiels
Interfrange, **cas de Young**

$$i = \frac{\lambda \times f}{e} = 50\,\mu m$$

Distance entre les images géométriques des deux étoiles (séparation angulaire ε)

$$d = \varepsilon \times f$$

Brouillage des franges

Les intensités des deux figures d'interférences se somment (sources incohérentes) le brouillage est total si frange brillante d'une figure confondue avec frange sombre de l'autre, soit :

$$d = \frac{i}{2} \rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{2e} = 4,22.10^{-6} rad = 0,87''$$

VI Pouvoir séparateur de l'objectif

Il s'agit de la théorie de la diffraction de Fraunhoffer par une ouverture circulaire, totalement hors programme.

L'étude est néanmoins reprise dans les notes de cours : **diffraction**