Banque PT 2007 B Matériau piezoélectrique

I Etude statique

I.1 Propriétés mécaniques :

$$x = \tau \times \frac{e}{Y} = \frac{F}{s} \times \frac{e}{Y} \rightarrow x = 1,22.10^{-10} m$$
$$x = \frac{F}{k} \rightarrow k = \frac{s \times Y}{e} = 1,63.10^{11} N.m^{-1}$$
$$E_p = k\frac{x^2}{2} = \frac{s \times Y}{2e} x^2$$

I.2 Propriétés électriques :

$$C = \varepsilon\frac{s}{e} = 5,89\, nF$$
$$u = \frac{q}{C} = E \times e$$
$$E_{élec} = \frac{q^2}{2C} = C\frac{u^2}{2} = u_{élec} \times \text{Volume} = \frac{\varepsilon E^2}{2} \times Se$$

II Effets piézoélectriques

II.1 Effet direct **a) Charges de polarisation**

$$q_A = s \times \sigma_A = s \times KY \times \frac{x}{e}$$
$$x = \frac{F}{s} \times \frac{e}{Y} \rightarrow q_A = K \times F$$

K constante piézoélectrique à ne pas confondre avec k raideur.

b) Coefficient α

$$u = \frac{q_A}{C} = \frac{KY}{\varepsilon} \times x = \alpha \times x \rightarrow \alpha = \frac{KY}{\varepsilon} = 5,6.10^{8} V.m^{-1}$$

II.2 Effet inverse

$$\delta W = \delta W_{méca} + \delta W_{élec} = Fdx + udq = Adx + Bdq$$
$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial B}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \quad : \quad \text{est une différentielle "exacte"}$$
$$\delta W = -dE_p \quad \text{avec :} \quad E_p = k\frac{x^2}{2} + \frac{q^2}{2C} + \alpha \times qx$$

Le dernier terme est un terme de couplage (cf terme $M \times i_1 i_2$ dans les circuits magnétiques)

II.3 Influence sur les propriétés statiques

$$u = 0 \rightarrow F = kx - \alpha^2 Cx = k\left(1 - \frac{\alpha^2 C}{k}\right)x = k' \times x \rightarrow k' = k(1-\beta) \text{ avec :}$$
$$\beta = \alpha^2\frac{C}{k} = \alpha^2\frac{\varepsilon}{Y} = K^2\frac{Y}{\varepsilon} \quad \text{: grandeur "intensive"}$$
$$x = 0 \rightarrow u = \frac{q}{C} - \frac{\alpha^2}{k}q = \frac{1}{C}\left(1 - \frac{\alpha^2 C}{k}\right)q = \frac{q}{C'} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{1}{C}(1-\beta)$$

On remarque assez logiquement que c'est l'inverse de C qui réagit comme k (cf analogies dans le chapitre oscillateurs).

La piézo-électricité diminue la raideur mécanique (k) et électrique ($1/C$)

Energie potentielle électrique à force nulle :

$$\delta W_{élec} = u\,dq = -dE_{pe} \Rightarrow E_{pe} = \frac{q^2}{2C'} = C'\frac{u^2}{2}$$
$$\beta = \frac{\alpha^2 C}{k} = \frac{K^2 Y}{\varepsilon} = \frac{1}{90} = 1,11.10^{-2}$$

La correction est faible de l'ordre du pourcent

III Etude harmonique

III.1 Obtention des équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{acoustique} + F_{piezo} = -p \times s - (kx + \alpha q)$$

Le premier signe - provient du fait que la P acoustique agit de droite à gauche, le second par loi d'action-réaction

Appliquons le formalisme complexe (on notera simplement a une amplitude complexe $\underline{a}_o$...)

$$(-m\omega^2 + k)x + \alpha q + sp = 0$$

$$\frac{q}{C} + \alpha x = u \text{ puis } q = \frac{i}{j\omega} \quad \text{attention i = courant ,} \quad j = \sqrt{-1}$$

d) On travaille à pression nulle, on détermine :

$$Z = \frac{u}{i} = \frac{1}{j\omega C} - \frac{\alpha^2}{k - m\omega^2}\frac{1}{j\omega} \rightarrow Z = \frac{1}{j\gamma\omega} \times \frac{1-(\omega/\omega_1)^2}{1-(\omega/\omega_2)^2}$$

On peut faire apparaître rapidement le facteur classique $\omega_2^2 = k/m$ ainsi que $\beta = \alpha^2 C/k$

Après quelques manipulations on trouve :

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}\,;\omega_1^2 = (1-\beta)\frac{k}{m}\,;\gamma = \frac{C}{1-\beta}$$

III.2 **Schéma électrique équivalent**

L'impédance du circuit électrique se met sous forme de fraction réduite en $p = j\omega$ selon :

$$Z_e(p) = 1/[pC_o + 1/[pL_m + 1/[pC_m]]]$$

On doit l'identifier à la forme :

$$Z = \frac{1}{p\gamma} \times \frac{1 + p^2/\omega_1^2}{1 + p^2/\omega_2^2}$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$Z_e = \frac{1 + p^2 L_m C_m}{p(C_m + C_o) + p^3 C_o C_m L_m}$$

Il ne reste plus qu'à factoriser par $1/p(C_m + C_o)$ et à identifier, on trouve :

$$\gamma = \frac{C_o^2}{C_m + C_o}\,;\,\omega_1^2 = \frac{1}{L_m C_m}\,;\,\omega_2^2 = \frac{1 + C_m/C_o}{L_m C_m}$$

Il aurait sans doute été plus rapide d'exprimer Z en fonction des variables de départ (k/m, β)

2 d) Il convient de calculer la masse, puis les calculs s'enchaînent... :

$$m = \rho \times S \times e = 2,65.10^{-3} kg \quad \text{on trouve finalement:}$$

$$C_o = C = 5,89 nF$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7,84.10^6 rad.s^{-1}$$

$$\omega_1 = \sqrt{1-\beta}\,\omega_2 = 7,80.10^6 rad.s^{-1}$$

$$C_m = \frac{\beta}{1-\beta}C = 66 pF\,;\,L_m = \frac{1}{(k/m)\beta C} = 0,26 mH$$