

Banque PT 2007 A

1 Analogies électriques et magnétiques

1.1 Champs créés par un cylindre

1.1.1. Electrostatique

Cylindre **circulaire** et de longueur **très grande**, devant son rayon R , chargé **uniformément**
→

$$\text{en coord.cyl.}(r, \theta, z) : \frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r \text{ et } V(r)$$

Gauss local :

$$r \leq R \rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rE_r) \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{2} + C_1$$

$$r \geq R \rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rE_r) \right) = 0 \rightarrow E_r = \frac{C_2}{r}$$

Attention : traiter $rE_r = f(r)$ comme une fonction à intégrer sans dériver le produit !

- La direction radiale n'étant pas définie en $r = 0$, on a $C_1 = 0$

- $E_r(r)$ étant continu en $r = R$ (**pas de charge surfacique**)

$$\frac{C_2}{R} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R}{2} \rightarrow C_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^2}{2} \rightarrow E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \times \frac{1}{r} \quad (r > R)$$

Potentiel électrique

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{\text{Grad}}(V(r)) \rightarrow dV = -E(r)dr$$

$$r \geq R \rightarrow dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^2}{2} \frac{dr}{r} \rightarrow V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Le potentiel pour $r \leq R$ se calcule selon :

$$\frac{dV}{dr} = -E_r = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r \rightarrow V(r) = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{4\epsilon_0} \text{ respectant } V(R) = 0$$

Graphes

"L'allure" des graphes s'obtient en travaillant en variables réduites (de manière à rendre cette "allure" indépendante des valeurs numériques spécifiques à tel ou tel problème posé).

Rappelons qu'une variable réduite n'est rien d'autre que le rapport (sans dimension) entre la grandeur physique dimensionnée et une valeur caractéristique.

- Coordonnée radiale réduite : $r^* = r/r_o$ avec $r_o = R$

- Champ électrique réduit : $E^* = E/E_o$ avec :

$$E_o = E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R}{2}$$

- Potentiel réduit : $V^* = V/V_o$ avec :

$$V_o = E_o \times r_o = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^2}{2}$$

On remarque que le choix de V_o n'est pas libre, il est imposé dimensionnellement par les choix de E_o, r_o ! Par ailleurs il ne correspond pas à $V(R)$

On obtient alors les expressions plus concises :

$$0 \leq r^* \leq 1 \rightarrow E^* = r^*; V^* = \frac{1 - r^{*2}}{2}$$

$$r^* \geq 1 \rightarrow E^* = \frac{1}{r^*}; V^* = -\ln(r^*)$$

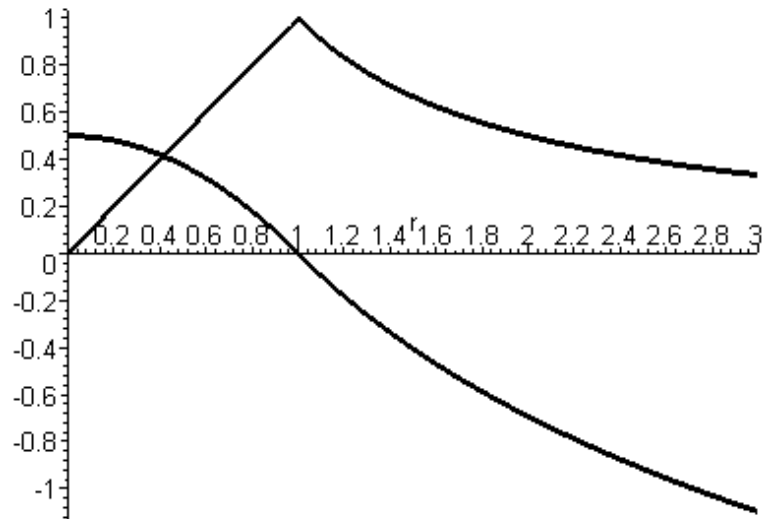
On constate que l'usage de variables réduites, constituant un choix cohérents d'unités, ne modifie pas l'écriture des lois fondamentales :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \rightarrow E_r^*(r) = -\frac{dV^*}{dr^*}$$

En revanche, pour l'équation de Poisson, il faut être prudent :

$$\text{pour } 0 \leq r^* \leq 1 : \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ or } \Delta V = \frac{V_o}{r_o^2} \times \Delta^* V^* \\ \rightarrow \Delta^* V^* = -2$$

Le facteur V_o/r_o^2 contient en effet les facteurs "dimensionnels" assurant que $\Delta^* V^*$ soit un nombre pur.



1.1.2. Magnétostatique

Les propriétés de symétrie changent, ρ scalaire $\rightarrow \vec{j}$ vectoriel, \vec{B} pseudo-vecteur :

$$\text{en coord.cyl.}(r, \theta, z) : \frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \frac{\partial}{\partial z} = 0 \rightarrow \vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta \text{ et } \vec{A} = A_z\vec{u}_z$$

Les nouvelles équations locales sont :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_o \vec{j} \text{ (Ampère)}, \overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

On vérifie immédiatement que ces équations sont semblables à celle concernant \vec{E} , V en électrostatique. Elles deviennent **complètement identiques en variables réduites, en posant, par analogie** :

$$E_o = E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_o} \frac{R}{2} \rightarrow B_o = B(R) = \mu_o j_z \frac{R}{2} \\ A_o = B_o \times R = \mu_o j_z \frac{R^2}{2}$$

En particulier, à l'extérieur du fil cylindrique :

$$A_z^* = -\ln(r^*) \rightarrow A_z = -A_o \times \ln\left[\frac{r}{R}\right] \rightarrow \beta = -A_o = -\mu_o j_z \frac{R^2}{2} = -\frac{\mu_o I}{2\pi}$$

2 Action d'un champ extérieur sur le cylindre

2.1 Effet Joule

L'exercice a été entièrement traité en cours. On rappelle néanmoins l'expression de la puissance volumique cédée par le champ à la matière :

$$p = \vec{j} \circ \vec{E} \text{ en } W.m^{-3}$$

$$p_J = \gamma \vec{E} \circ \vec{E} = \gamma E^2 \text{ puissance Joule volumique } (\geq 0)$$

Le bilan électromagnétique revient à vérifier que le flux du vecteur de Poynting entrant dans le cylindre est bien égal à la puissance Joule dissipée dans le cylindre. Le vecteur de Poynting étant radial, cela revient à vérifier :

$$\|\vec{\Pi}\| \times 2\pi R h = p_J \times \pi R^2 h$$

2.2. Conducteur cylindrique dans un condensateur plan

Le titre (non donné dans l'énoncé) correspond à une situation qui en principe n'a plus à être étudiée dans l'esprit des programmes actuels. L'exercice constitue néanmoins une riche application de l'électrostatique.

a)

$$r < R : \vec{E} = 0 \text{ et } V = Cste$$

b)

$$V(r, \theta) = g(r) \times \cos(\theta)$$

$$\Delta V = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) - \frac{g}{r^2} \right) \cos(\theta) = 0$$

$$g = r^p \rightarrow (p^2 - 1)r^{p-2} = 0 \rightarrow p = \pm 1$$

$$g(r) = A \times r + \frac{B}{r}$$

c)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \left(-A + \frac{B}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin(\theta)$$

d) Loin du cylindre :

$$E_r = \vec{E}_o \circ \vec{u}_\theta = E_o \cos(\theta) \text{ et } \frac{B}{r^2} \rightarrow 0 \text{ donc : } A = -E_o$$

e) Traversée d'une surface chargée :

$$\vec{\Delta E} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{u}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{u}_r \rightarrow \text{ pour } r = R :$$

$$\Delta E_\theta = 0 \rightarrow B = -AR^2 \text{ finalement : } A = -E_o ; B = E_o R^2$$

$$\Delta E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_o} = E_o \left(1 + \frac{R^2}{R^2} \right) \cos(\theta) = 2E_o \cos(\theta)$$

En conclusion, et (pourquoi pas) en variables réduites, le champ électrique Et le potentiel sont nuls pour $r < R$. A l'extérieur du cylindre ($r > R, r^* > 1$)

$$E_r^* = \left(\frac{1}{r^{*2}} + 1 \right) \cos(\theta) ; E_\theta^* = \left(\frac{1}{r^{*2}} - 1 \right) \sin(\theta)$$

$$V^* = \left(\frac{1}{r^*} - r^* \right) \cos(\theta) ; \sigma = \epsilon_o E_o \times \cos(\theta) \text{ avec :}$$

$$E^* = \frac{E}{E_o} ; r^* = \frac{r}{R} ; V^* = \frac{V}{E_o R}$$

On vérifie bien que le potentiel est continu à la traversée de la surface chargée et que la charge totale du cylindre reste nulle.

1.2.3 Cylindre supraconducteur

Quoique les équations locales de la magnéto-statique semblent assez différentes de celles de
PT 2007 Phys A

l'électrostatique, la situation est finalement mathématiquement la même. Si l'on admet la forme de la solution pour le potentiel vecteur :

$$A_r = A_\theta = 0; A_z = r^p \times \cos(\theta)$$

L'application successive de deux fois l'opérateur rotationnel en coord. cyl. donne :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{B} = 0 \rightarrow B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -r^{p-1} \times \sin(\theta)$$

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -p \times r^{p-1} \times \cos(\theta); B_z = 0$$

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{B}) = \mu_o \vec{j} = 0 \rightarrow \text{composante } z : \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \right] = 0$$

$$(p^2 - 1)r^{p-2} \cos(\theta) = 0 \rightarrow p = \pm 1$$

Par superposition, il faut dans les expressions précédentes remplacer r^p par $A' \times r + B'/r$

La relation de passage pour le champ magnétique s'écrit :

$$\Delta \vec{B} = \mu_o \vec{j}_S \wedge \vec{u}_n \text{ avec } \vec{u}_n = \vec{u}_r \text{ en } r = R$$

Juste à l'extérieur, toujours en $r = R$, on en déduit que $B_r = 0$ composante continue, soit :

$$\left(A'R + \frac{B'}{R} \right) \times \frac{\sin(\theta)}{R} = 0 \rightarrow B' = -A'R^2$$

Pour la composante selon θ , l'analogie avec l'électrostatique est également complète. Explicitons-la directement :

$$\Delta E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_o} = 2E_o \cos(\theta) \rightarrow \Delta B_\theta = \mu_o j_S = 2B_o \cos(\theta)$$

Le champ magnétique a ne pas dépasser vaudra :

$$B_c = \frac{\mu_o j_S}{2}$$

1.3 puissance dans un câble coaxial

1. Equation de d'Alembert dans le vide

Voir cours !

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 ; c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$$

2. Dans le câble :

$$\text{Div}(\vec{E}) = 0 \rightarrow E_o(r) = \frac{K}{r} = E_1 \times \frac{R_1}{r}$$

$$\vec{E}(M, t) = E_1 \times \frac{R_1}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r$$

La suite est semblable aux calculs donnés dans le corrigé du sujet PT IB 2003. Nous ne détaillerons donc que les réponses aux questions un peu originales.

$$\vec{B} = B_o(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow -kE_o(r) \sin(\omega t - kz) = -\omega B_o(r) \sin(\omega t - kz)$$

$$B_o(r) = \frac{k}{\omega} E_o(r) = \frac{E_o(r)}{c}$$

Les conditions de passage en $r = R_1, R_2$ donnent les densités surfaciques de charge et de courant :

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 \cos(\omega t - kz); \sigma_2 = -\varepsilon_0 E_1 \frac{R_1}{R_2} \cos(\omega t - kz)$$

$$j_{S1} = \frac{B_1}{\mu_0} \cos(\omega t - kz); j_{S2} = \frac{B_1}{\mu_0} \frac{R_1}{R_2} \cos(\omega t - kz) \text{ avec } B_1 = \frac{E_1}{c}$$

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_1 B_1}{\mu_0} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \times \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_1 B_1}{\mu_0} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2$$

Puissance moyenne "rayonnée" par l'onde (ou plutôt transportée...)
il faut intégrer entre les deux cylindres, en utilisant $dS = 2\pi r dr$

$$\langle P \rangle = \int_{R_1}^{R_2} \langle \vec{\Pi} \rangle dS = \frac{1}{2} \frac{E_1 B_1}{\mu_0} R_1^2 \times 2\pi \int \frac{dr}{r} = \frac{E_1 B_1}{\mu_0} R_1^2 \times \pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On peut introduire l'impédance du vide puisque :

$$\frac{E_1 B_1}{\mu_0} = \frac{E_1}{\mu_0} \times \frac{E_1}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_1^2 = \frac{E_1^2}{Z_0}$$

A.N.:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega; \langle P \rangle = 84 \text{ mW}$$

Quoique cela ne soit pas demandé, on peut calculer le courant transporté et la tension entre les conducteurs :

$$I = j_{S1} \times 2\pi R_1 = \frac{B_1}{\mu_0} \times 2\pi R_1 \times \cos(\omega t - kz)$$

$$I_m = \frac{B_1}{\mu_0} \times 2\pi R_1 = \frac{E_1}{\mu_0 c} \times 2\pi R_1 = \frac{E_1}{Z_0} \times 2\pi R_1 = 83 \text{ mA}$$

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} E_1 \times \frac{R_1}{r} \cos(\omega t - kz) dr = E_1 \times R_1 \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$V_m = E_1 \times R_1 \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2,03 \text{ V}$$

on vérifie alors que $P = I \times V$ soit, en moyenne temporelle :

$$\langle P \rangle = \frac{I_m V_m}{2} = I_{eff} V_{eff}$$

2 Interférences et diffraction

2.1. Une ou plusieurs ouvertures rectangulaires

1. D'après le principe d'Huygens-Fresnel, l'amplitude complexe totale observée sera la somme des amplitudes complexes élémentaires associées à des sources élémentaires recouvrant l'ouverture étudiée de la forme :

$$ds = da \times \exp(i\varphi)$$

- Le module de l'amplitude est simplement proportionnel à l'élément de surface
 $dS = dx dy \rightarrow da = K dx dy$

- L'argument est la phase de l'onde mesurée par rapport à une origine arbitraire.

2. On nous propose tout naturellement de prendre l'origine associée au point O. Le déphasage entre une source O et une source M sur une onde caractérisée par le vecteur \vec{k} vaut (par définition du vecteur d'onde) :

$$\varphi = \vec{k} \circ \overrightarrow{OM} \text{ avec } \overrightarrow{OM}(x, y, 0)$$

Puisque l'on observe dans la direction $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ on a simplement :

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \\ \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\underline{s_o} = \int \underline{ds} = K \iint \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\right)\right] dx dy$$

Conforme à l'expression proposée.

1.3 Considérons, pour simplifier le schéma $y'=0$, et l'on suppose $x'/L \ll 1$ (Conditions de Gauss). Alors $x'/f' \simeq \alpha$. De même, $y'/f' \simeq \beta$ (Faire le schéma !). On a donc finalement :

$$A = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x'}{f'} ; B = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y'}{f'}$$

On calcule l'intégrale :

$$\underline{s_o} = \int \underline{ds} = K \int_{-L/2}^{+L/2} \exp[iAx] dx \int_{-l/2}^{+l/2} \exp[iBy] dy = K$$

Or :

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \exp[iAx] dx = \frac{\exp[iAL/2] - \exp[-iAL/2]}{iA} = L \frac{\exp[iAL/2] - \exp[-iAL/2]}{2i \times AL/2} = L \frac{\sin(AL/2)}{AL/2}$$

On reconnaît la fonction sinus cardinal :

$$\text{sin } c(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

de valeur maxi à l'origine : $\text{sin } c(0) = 1$ et s'annulant ensuite pour toutes les valeurs entières de u

Avec

$$u = \frac{L}{f'} \frac{x'}{\lambda}$$

Finalement :

$$\underline{s_o} = K \times (Ll) \times \text{sin } c\left(\frac{L}{f'} \frac{x'}{\lambda}\right) \text{sin } c\left(\frac{l}{f'} \frac{y'}{\lambda}\right)$$

L'amplitude est proportionnelle à la surface de l'ouverture et au produit de deux sinus cardinaux.

L'intensité est mesurée par le carré module de $\underline{s_o}$. Si on note I_{\max} sa valeur maxi on a :

$$I = I_{\max} \times \text{sin } c^2\left(\frac{L}{f'} \frac{x'}{\lambda}\right) \text{sin } c^2\left(\frac{l}{f'} \frac{y'}{\lambda}\right)$$

Dans le cas d'une fente allongée selon Ox et de plus $x' = 0$, on a plus simplement :

$$I = I_{\max} \times \text{sin } c^2\left(\frac{l}{f'} \frac{y'}{\lambda}\right)$$

La largeur de la tâche centrale correspond à l'intervalle :

$$-1 \leq \frac{l}{f'} \frac{y'}{\lambda} \leq +1 \rightarrow \Delta y' = 2 \frac{f' \lambda}{l} = 4 \text{ cm}$$

4. Diaphragme constitué de deux fentes allongées : fentes de Young. L'expression de l'intensité est maintenant multipliée par la fonction d'interférence à deux fentes d'expression :

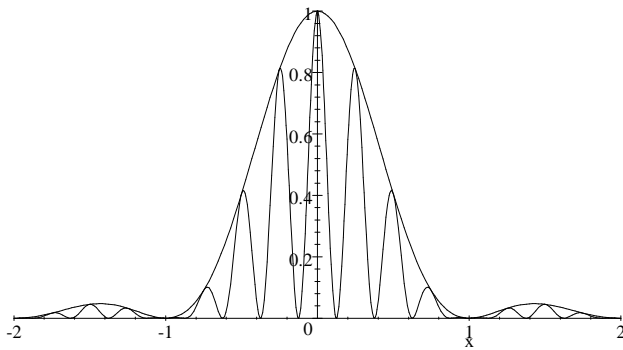
$$I_2 = \frac{1 + \cos(2\pi p)}{2} \text{ avec } p = \frac{2a \times \sin(\theta)}{\lambda} = \frac{2a \times y'}{\lambda \times f'}$$

L'interfrange, valeur de $\Delta y'$ associée à $\Delta p = 1$ mesure

$$i = \frac{\lambda \times f'}{2a} = 0,5 \text{ cm}$$

Soit x , l'ordre de diffraction, la courbe demandée dans l'intervalle $[-1.. + 1]$ est d'équation :

$$I = \left(\frac{\sin(\pi \times x)}{\pi \times x} \right)^2 \times \left(\frac{1 + \cos(8 \times \pi \times x)}{2} \right)$$



Les **ordres d'interférences** entiers observables (franges brillantes), dans la tâche centrale de diffraction, vont de -3 à $+ 3$.

En abscisse, on a porté l'ordre de diffraction P_{dif} :

-

$$P_{if} = \frac{\delta_{if}}{\lambda} = \frac{2a \times \theta'}{\lambda} \text{ pour } \theta' \ll 1 : \sin(\theta') \approx \theta' \approx \frac{y'}{f'}$$

$$P_{dif} = \frac{\delta_{dif}}{\lambda} = \frac{l \times \theta'}{\lambda} = \frac{P_{if}}{4}$$

5. Les fentes sont maintenant plus écartées et très fines : diffraction négligée (parce que très large !). L'intensité est donnée par :

$$I = \frac{1 + \cos(2\pi P_{if})}{2} \text{ avec } : P_{if} = \frac{2b \times \theta'}{\lambda} = \frac{2b \times y'}{\lambda \times f'} = \frac{y'}{i}$$

où i représente l'interfrange : variation de y' associée à $\Delta P_{if} = 1$

a) **Lame d'air**

On remplace le vide par de l'air sur une petite épaisseur. (En pratique on réalise plutôt l'inverse !!) La variation de chemin optique vaut alors :

$$\Delta\delta = (n - 1)e \rightarrow \Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda} \rightarrow \Delta y = i \times \Delta p = \frac{i}{\lambda} (n - 1)e = f' \frac{(n - 1)e}{2b}$$

La longueur d'onde n'intervient plus. On peut l'expliquer plus simplement :

Soit θ' l'angle de déviation supposé petit , on a fondamentalement :

$$\theta' = \frac{\delta}{2b} = \frac{y'}{f'}$$

En différentiant la dernière égalité, on trouve :

$$dy' = \frac{f'}{2b} \times d\delta = \frac{f'}{2b} \times (n - 1)e \rightarrow (n - 1) = 2,94.10^{-4}$$

b) **Spectre cannelé**

Pour $y' = 1 \text{ cm}$ et $f' = 1 \text{ m}$ on a

$$\theta = \frac{y'}{f'} = 0,01 = \frac{\delta}{2b} \rightarrow \delta = 10 \mu\text{m}$$

Or $\delta = p \times \lambda$ et les cannelures correspondent aux radiations "éteintes" par interférence destructive cad p demi-entier. Les valeurs extrêmes du spectre sont

$$p(\lambda = 0,8 \mu\text{m}) = 12,5; p(\lambda = 0,4 \mu\text{m}) = 25$$

On voit donc 13 cannelures pour les longueurs d'ondes :

$$\lambda_i = \frac{10 \mu\text{m}}{12,5 + i} \quad \text{avec } i = 0, 1, 2, \dots, 12$$

L'examineur espère-t-il que le candidat trouve le temps de faire les calculs au coeur d'un sujet aussi pléthorique ?

1.6 Système de trois fentes (mini-réseau)

Il faut sommer trois amplitudes complexes. Les modules sont égaux, les arguments sont en progression arithmétique. En prenant l'origine au niveau de la fente centrale on a :

$$s_i = a(\exp(-i\Delta\varphi) + 1 + \exp(+i\Delta\varphi)) = a(1 + 2 \times \cos(\Delta\varphi))$$

$$I = I_o(1 + 2 \times \cos(\Delta\varphi))^2 \quad \text{avec classiquement : } \Delta\varphi = 2\pi p$$

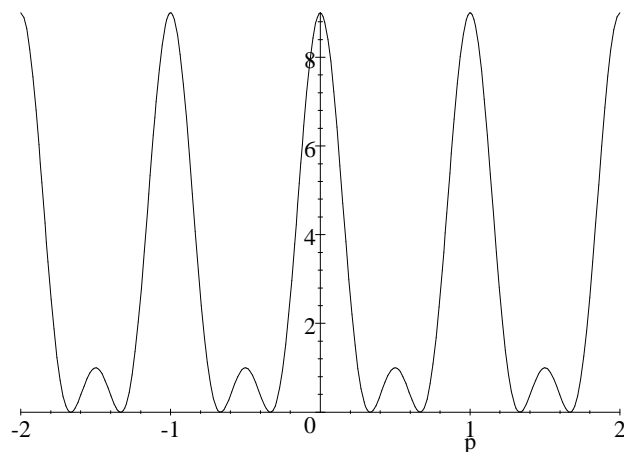
I_o étant l'intensité uniforme, d'une fente unique.

On vérifie facilement (développer le carré PUIS calculer la moyenne sur $\Delta\varphi$) :

$$\langle I \rangle = 3I_o$$

Traçons cette intensité avec comme variable, l'ordre d'interférence p :

$$I/I_o = (1 + 2 \times \cos(2 \times \pi \times p))^2$$



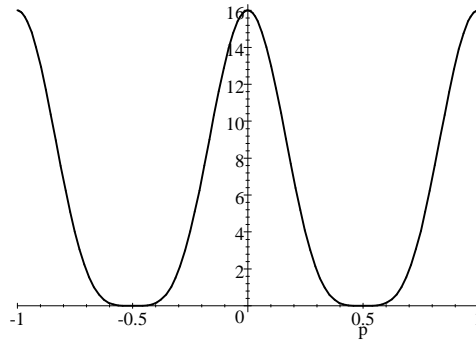
Nous voyons apparaître la caractéristique générale du réseau à N fentes : les maxima principaux, correspondant à des ordres entiers sont amplifiés (facteur N^2 en intensité) et simultanément de largeur réduite (extension autour de p entier : $[-p/N.. + p/N]$). Maxima secondaires très faibles.

Remarque :

Notons que dans le cas d'une interférence à trois fentes, le maximum secondaire peut être annulé en doublant la largeur de la fente centrale. Le calcul devient :

$$s_i = a(\exp(-i\Delta\varphi) + 2 + \exp(+i\Delta\varphi)) = 2a \times (1 + \cos(\Delta\varphi))$$

$$I = 4I_o(1 + \cos(\Delta\varphi))^2 \quad \text{avec } \Delta\varphi = 2\pi p$$



Graphes : $4 \times (1 + \cos(2 * \pi * p))^2$

2.2 Ouverture précédée par un prisme de verre

Sujet a priori délicat que l'on peut néanmoins essayer de présenter simplement...

Nous avons vu que lorsque le plan de l'ouverture est un plan d'onde (onde plane d'incidence normale), l'intensité diffractée dans la direction $\theta' = y'/f'$ est due à une différence de marche "après l'ouverture" d'expression :

$$\delta_2 = \ell \times \sin(\theta') \approx \frac{\ell}{f'} y'$$

Le prisme introduit une différence de marche (différence de chemin optique) "avant l'ouverture", d'expression :

$$\delta_1 = (n - 1) \times (e_o - \theta \times y)$$

Attention au risque de confusion : θ' représente la direction d'observation alors que θ est le "petit" angle au sommet du prisme !

La différence de marche totale à prendre en compte dans le calcul de l'amplitude complexe vaut alors :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = Cste + \left[\frac{\ell}{f'} - (n - 1)\theta \right] y = Cste + [\theta' - (n - 1)\theta] y$$

En particulier le centre de la figure de diffraction ($\delta = 0$) a simplement subi une rotation :

$$\Delta\theta' = (n - 1)\theta = 0,025 \text{ rad}$$

ce qui constitue la réponse à la dernière question (c)

La figure de diffraction n'est donc pas modifiée dans son aspect, mais simplement "tourné" de $\Delta\theta'$

d) D'un point de vue "optique géométrique", on montre que la déviation des rayons lumineux par un prisme de petit angle est sensiblement indépendante de l'incidence et vaut justement :

$$D = (n - 1)\theta$$

(cf. montage du biprisme de Fresnel)

En conclusion, on peut retenir la règle générale :

La figure de diffraction causée par le passage dans un diaphragme est toujours centrée sur l'image donnée par les règles de l'optique géométrique.

3. Mouvement d'une spire dans un champ B non uniforme

1.a) Si $b=0$ (champ B uniforme) pas de variation de flux, pas de phénomène d'induction

b)

$$\Phi = \int_{z(t)}^{z(t)+a} (B_o - bz) \times a dz$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = a^2 b \frac{dz}{dt}$$

On a utilisé la règle de dérivation sous le signe intégral, sans calculer explicitement cette intégrale !

Une autre manière de se persuader du résultat est de calculer e à l'aide de la circulation du champ électromoteur :

$$e = \oint \vec{E} \circ d\vec{l} = \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \circ d\vec{l}$$

La fem induite est positive et va induire un courant positif. Cela est conforme à la loi de Lenz : le champ propre associé \vec{B}_p sera lui-même "positif", plus exactement, créera un flux propre positif, s'opposant à la diminution du flux inducteur dans la chute ($dz/dt > 0$)

2.

En projetant selon z avec $v = dz/dt$

$$m \frac{dv}{dt} = mg + F_L = mg - i \times a^2 \times b$$

$$e = Ri$$

On a admis "implicitement" que l'autoinduction était négligeable ($L = 0$)

La résolution est ultra-classique, on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(a^2 \times b)^2}{R} v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \text{ avec } \tau = \frac{mR}{(a^2 \times b)^2} = 24,4 \text{ ms}$$

$$v_\ell = g \times \tau = 0,24 \text{ m.s}^{-1}$$

3.

Cette fois le champ B varie à la fois dans l'espace ET au cours du temps.

A la nouvelle origine des temps, on a atteint la vitesse limite (on notera t le temps avec la nouvelle origine !)

La variation de flux au cours du temps est simplement la somme des deux contributions, on trouve :

$$e = -\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{Lorentz} - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{Neuman} = a^2 b \frac{dz}{dt} + b_1 a^2 = a^2 \times (bv + b_1)$$

L'équ du mvt devient :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(a^2 \times b)^2}{R} \left(v + \frac{b_1}{b}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g + \gamma \text{ avec } \gamma = \frac{b b_1 a^4}{mR}$$

On va donc trouver une nouvelle vitesse limite

$$v_\ell = (g + \gamma) \times \tau = 0,286 \text{ m.s}^{-1}$$

Deux phases du mouvement :

1° $0 \leq t \leq 10s$: Passage "exponentiel" de $v = 0$ à $v_1 = g \times \tau = 0,24 \text{ m.s}^{-1}$

2° $10s \leq t \leq t$: Passage "exponentiel" de $v_1 = 0,24 \text{ m.s}^{-1}$ à

$v_2 = (g + \gamma) \times \tau = 0,286 \text{ m.s}^{-1}$

4. Oscillations amorties par les courants induits

On se retrouve dans la première situation avec en plus une force de rappel de ressort.

L'équ diff s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(a^2 \times b)^2}{R} v - kz$$

On se retrouve avec une équ diff du second ordre en z et non plus du premier ordre en v !
Si l'on choisit comme origine des z, l'état d'équilibre statique, on peut "oublier" la pesanteur.

Normalisons cette équation:

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz'}{dt} + \omega_o^2 z' = 0 \quad \text{avec } z' = z - z_1$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q_o} \frac{dz'}{dt} + \omega_o^2 z' = 0$$

avec les notations consacrées :

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} = 10^3 \rightarrow \omega_o = 31,6 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_o}{Q_o} \rightarrow Q_o = \omega_o \tau = 0,77$$

Le temps d'amortissement τ est inchangé. Le facteur de qualité est très faible, néanmoins, comme $Q_o > 1/2$ la solution est de type oscillatoire amortie.

c) La résolution de l'équ caractéristique donnent des racines complexes conjuguées de la forme :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_o}{2Q_o} \pm i\omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_o^2}} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega$$

$$\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_o^2}} = 24 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,26 \text{ s}$$

La solution est de la forme :

$$z' = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \times \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$$

Les constantes d'intégration A et B se calculent à l'aide des CI

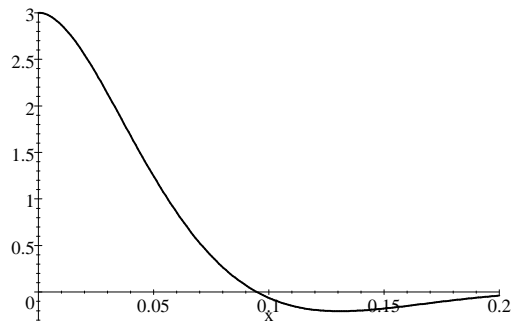
La constante A est immédiate :

$$A = z'(0) = 3 \text{ cm}$$

La constante B se déduit de :

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)_o = 0 \rightarrow B = \frac{A}{2\omega\tau}$$

$$z' = A \times \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega\tau} \sin(\omega t) \right] \times \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) = 3 \times \left[\cos(24 \times t) + \frac{\sin(24 \times t)}{1.17} \right] \times \exp\left(-\frac{t}{0.0488}\right)$$



Le décrément logarithmique, est défini selon :

$$\delta = \ln\left(\frac{z(t)}{z(t+T)}\right) = \frac{T}{2\tau} = \frac{\pi}{\omega\tau} = \frac{\pi}{\omega_o\tau} \times \frac{1}{\sqrt{1-1/4Q_o^2}} = 4,07$$

d) On remarque que le courant induit provoque un amortissement des oscillations. Référence au freinage par courants de Foucault (ralentisseur de camion)

FIN