

Banque PT - 2002 - Epreuve IB

1 - Propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique

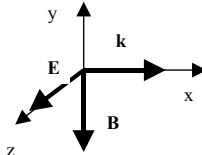
1.1. $\omega = k.c.$

1.3.

1.2. $\vec{B} = \frac{\vec{x}}{c} \wedge \vec{E}$

1.4. $\vec{f}_e = q.\vec{E}$

1.5. $\vec{f}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$



1.6. $\frac{\|\vec{f}_m\|}{\|\vec{f}_e\|} \approx v \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$ or, d'après 1.2., on a $\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$ d'où $\frac{\|\vec{f}_m\|}{\|\vec{f}_e\|} \approx \frac{v}{c}$

1.7. Comme $v \ll c$, la force magnétique sera négligée par rapport à la force électrique.

1.8. On applique le principe fondamental de la dynamique aux particules soumises au champ \vec{E} :

$$m.\vec{v}_e = -e.\vec{E} \quad \text{et} \quad M.\vec{v}_i = e.\vec{E}$$

1.9. En notation complexe, la dérivation temporelle est une multiplication par $j\omega$

$m.j.\omega.\vec{v}_e = -e.\vec{E}$ et $M.j.\omega.\vec{v}_i = e.\vec{E}$

d'où $\vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}_0}{j\omega m} e^{j(\omega t - kx)}$ et $\vec{v}_i = \frac{e\vec{E}_0}{j\omega M} e^{j(\omega t - kx)}$

1.10. $\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i = Ne.(v_i - v_e)$ 1.11. $\vec{j} = \frac{Ne^2 E_0}{j\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) e^{j(\omega t - kx)}$

Dans la suite on négligera $1/M$ devant $1/m$.

1.12. $v_{0e} = \frac{e.E_0}{\omega.m} = 108 \text{ m.s}^{-1}$; $z_{0e} = \left| \frac{v_{0e}}{j.\omega} \right| = \frac{e.E_0}{\omega^2.m} = 1,72 \text{ }\mu\text{m}$;

$j = \frac{Ne^2 E_0}{\omega.m} = 8,62.10^{-8} \text{ A.m}^{-2}$.

La vitesse est très inférieure à c donc on peut effectivement considérer les électrons comme non relativistes conformément à l'approximation du 1.7.

1.13. Où on tient compte de l'électroneutralité du plasma et de la présence de densités de courants en son sein :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0.\vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

1.14. dérivation temporelle $\Leftrightarrow .j\omega$ et dérivation spatiale $\Leftrightarrow .-j k$

$$\begin{aligned} -j\vec{k}.\vec{E} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \vec{B} &= \mu_0.\vec{j} + j\frac{1}{c^2} \omega\vec{E} \\ -j\vec{k}.\vec{B} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \vec{E} &= -j\omega\vec{B} \end{aligned}$$

1.15. L'équation de Maxwell-Faraday donne une structure d'onde plane similaire dans le plasma à

celle du vide : $\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \vec{B}$

1.16. Injectons cette expression de \vec{B} dans l'équation de Maxwell-Ampère.

$-j\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = -j(\vec{k}.\vec{E})\vec{E} + \frac{\vec{k}^2}{\omega}.\vec{E} = -j\mu_0 \frac{Ne^2 \vec{E}}{\omega m} + j\frac{1}{c^2} \omega\vec{E}$

d'où la relation de dispersion demandée : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où $\omega_p^2 = \frac{\mu_0.N.e^2.c^2}{m} = \frac{N.e^2}{m.\epsilon_0}$

1.17. k étant supposé réel, son carré est positif donc $\omega > \omega_p$. Donc les ondes pouvant se propager dans le plasma doivent avoir une fréquence f supérieure à $f_p = \omega_p / 2.\pi$.

1.18. $f_p = 634,8 \text{ kHz}$.

1.19. Dans ce cas, k^2 est un réel négatif donc k est imaginaire pur $k = j.\alpha$ avec

$\alpha = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ soit $\alpha = \frac{2.\pi}{c} \sqrt{f_p^2 - f^2}$

1.20. Dans le cas où il y a propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma, le champ électrique est donné par l'expression donnée en préambule de l'énoncé :

$\vec{E} = \vec{E}_0.e^{j(\omega t - kx)}$

Pour 2 points d'abscisses x et $x+\Delta x$ en phase atteints respectivement en $t+\Delta t$, on a

$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0.e^{j(\omega t - kx)} = \vec{E}(x + \Delta x, t + \Delta t) = \vec{E}_0.e^{j(\omega(t+\Delta t) - k(x+\Delta x))}$

d'où $\omega.\Delta t - k.\Delta x = 0$. La vitesse de propagation de la phase entre ces deux points est donc

donnée par $v_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$

1.21. Pour $f > f_p$, $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ soit $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$ d'où $n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$

1.22. * Les rayons incident, réfléchi et réfracté sont dans un même plan, le plan d'incidence.

* Le rayon réfléchi fait avec la normale au dioptre au point d'incidence, le même angle que le rayon incident.

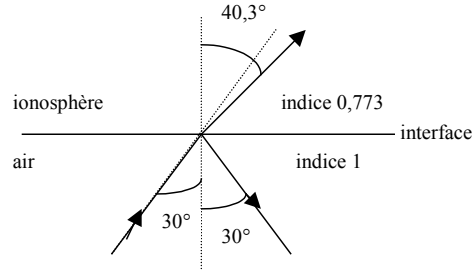
* Le rayon réfracté, lui fait un angle r tel que, si i est l'angle d'incidence : $\sin(i) = n.\sin(r)$

l'indice de réfraction de l'air étant pris ici égal à 1.

Pour $f = 1 \text{ MHz}$, $n = 0,773$.

1.23. Il y a réflexion totale limite pour $r = 90^\circ$, d'où $\sin(i_{lim}) = n$ soit $i_{lim} = 50,6^\circ$.

Pour $i = 30^\circ$, on trouve $r = 40,3^\circ$.

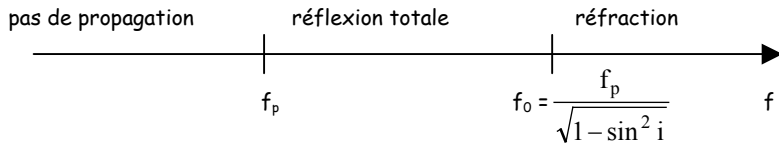


1.24. La condition de non-réflexion totale s'écrit $\sin(i) < \sin(i_{lim})$ soit $\sin(i) < n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$

qui aboutit à l'inégalité $f > \frac{f_p}{\cos.i} \geq f_p$

1.25. On considère maintenant le cas de la réflexion totale donc $\sin(i) \geq \sin(i_{lim})$ qui aboutit à

l'inégalité $\frac{f_p}{\cos.i} \geq f \geq f_p$



Autrement dit, il y a réflexion pour $f < f_0$.

1.26. Pour $i = 30^\circ$ $f_0 = \frac{f_p}{\cos.i} = \sqrt{2} f_p = 733,0 \text{ kHz}$.

1.27. Pour une incidence normale, on a $f_0 = f_p$.

1.28. Une méthode de détermination de la densité électronique N du plasma pourrait être de « tirer » une onde électromagnétique au zénith ($i = 0$) et de balayer en fréquence. L'intensité du signal réfléchi par l'ionosphère chute lorsque f dépasse f_p . f_p dépendant de N (cf. 1.16) on peut ainsi accéder à sa mesure.

1.29. $N(h)$ est donnée par un polynôme d'ordre 2 en h . On se propose de mettre l'expression sous la forme $N(h) - a = [(h - h_0) - b]^2$, forme directement représentable.

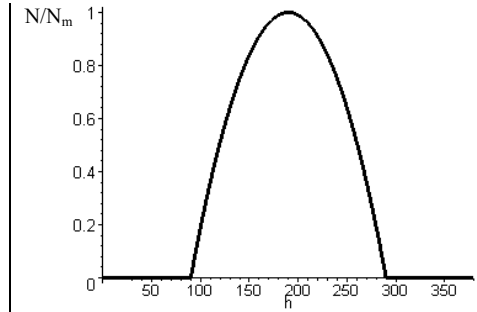
On trouve $\frac{N(h) H^2}{N_m} - \frac{H^2}{4} = -\left[(h - h_0) - \frac{H}{2}\right]^2$

où $N = N_m$ pour $h = h(N_m) = 190 \text{ km}$

1.30. L'onde est transmise en incidence normale si sa fréquence est supérieure à $f_p(N)$ (cf. 1.28). f_p est une fonction croissante de N . Si l'onde a une fréquence supérieure à $f_p(N_m) = f_c$, alors elle traverse la totalité de la couche ionosphérique.

$f_c = 6,35 \text{ MHz}$.

f_c est la fréquence plasma f_p maximale.



1.31. L'onde peut alors subir une réflexion totale à une altitude $h < h(N_m) = 190 \text{ km}$ si $f_p(N(h))$ devient inférieure à la fréquence f de l'onde. A l'altitude de réflexion, on a

$$f = f_p(N(h)) = \frac{e.c}{2.\pi} \sqrt{\frac{\mu_0.N_m.4}{m.H^2} (h_r - h_0)[H - (h_r - h_0)]}$$

soit $f(h_r) = f_c \sqrt{\frac{4.(h_r - h_0)[H - (h_r - h_0)]}{H^2}}$

1.32.

h_r (km)	$h_0 + H/8 = 115$	$h_0 + H/4 = 140$	$h_0 + 3H/8 = 165$
f/f_c	$\sqrt{7}/4$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{15}/16$
$f(h_r)$ (MHz)	4,20	5,50	1,54

1.33.

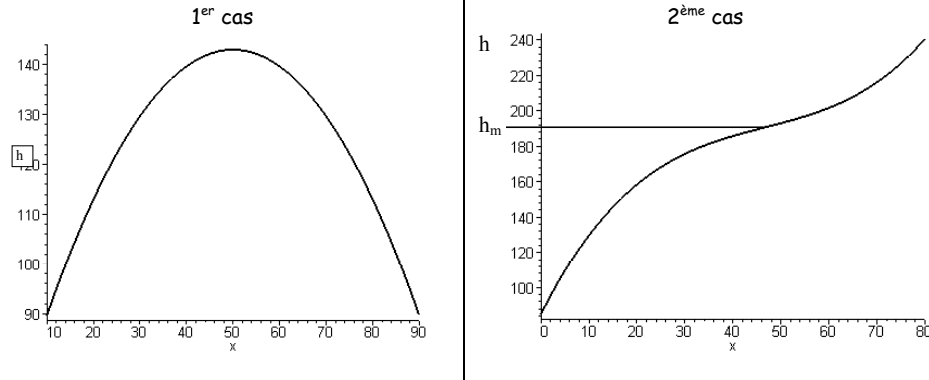
h	90	190	290
N/N_m	0	1	0
$f_p(N)$ varie comme \sqrt{N}		f_c	
$n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$		n_{min}	
i	i_0		
$f_0 = \frac{f_p}{\cos.i}$			

1^{er} cas : l'onde n'atteint pas $h(N_m) = h_m$.

L'onde pénètre dans l'ionosphère et voit avec l'altitude augmenter la densité électronique augmenter également. La fréquence plasma augmente. L'indice diminue donc l'angle d'incidence augmente. La fréquence f_0 limitant le domaine de fréquences de réflexion totale augmente et vient « rattraper » la fréquence du signal. Il se réfléchit.

2^{ème} cas : l'onde atteint h_m.

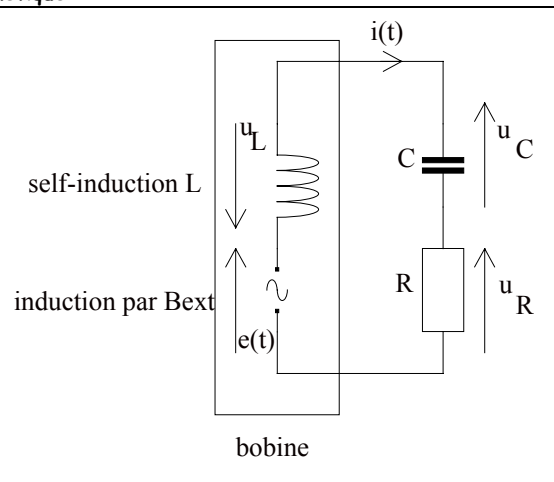
La première phase se décrit comme précédemment. A l'altitude h_m, toutes les grandeurs changent de sens de variation. Le rayon passe par un point d'inflexion. L'angle d'incidence se remet à diminuer alors que l'altitude augmente.



Dans les deux cas, on retrouve un résultat d'optique géométrique dans les milieux non homogènes : « le rayon se dirige vers les milieux de plus fort indice ».

2 - Réception d'une onde électromagnétique

2.1. On décompose le flux magnétique au sein de la bobine en 2 contributions : celle due au courant qui parcourt la bobine et celle du champ extérieur capté. Le premier génère le terme d'auto-induction, et le second le terme de « mutuelle » induction avec l'émetteur de l'onde électromagnétique. C'est ce terme qui est générateur de courant dans le circuit.
On adopte donc la convention générateur pour le dipôle qui modélise l'action du champ extérieur, et la convention récepteur pour les autres dipôles.



2.2. Loi de Faraday :
$$e(t) = -\frac{d\Phi_{B_{ext}}}{dt} = -N.S.\frac{dB}{dt} = -N.S.B_0.\frac{d}{dt}(\cos(\Omega t).\cos(\omega_0 t))$$

soit
$$e(t) = N.S.B_0.(\Omega.\sin(\Omega t).\cos(\omega_0 t) + \omega_0.\cos(\Omega t).\sin(\omega_0 t))$$

2.3. Dans l'approximation proposée, le premier terme est négligeable. e(t) prend la forme proposée pourvu que l'on pose $E_0 = N.S.B_0.\omega_0$.

2.4.
$$e(t) = \frac{E_0}{2} [\sin((\omega_0 + \Omega)t) + \sin((\omega_0 - \Omega)t)]$$

2.5. Pour chaque pulsation Ω de la modulation comprise entre $\Omega_1 = 2.\pi.f_1$ et $\Omega_2 = 2.\pi.f_2$ on peut écrire cette linéarisation. Le spectre de pulsation reçues par le circuit est donc $[\omega_0 - \Omega_2, \omega_0 - \Omega_1] \cup [\omega_0 + \Omega_1, \omega_0 + \Omega_2]$.

NB : $\omega_0 - \Omega_1 \approx \omega_0 + \Omega_1 \approx \omega_0$.

2.6. En notation complexe, on a la loi des mailles : $E_0' = \frac{E_0}{2} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) I_0$ d'où

en module
$$I_0 = \frac{E_0'}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

2.7. Sa valeur maximale est $I_{0M} = E_0' / R$ à la résonance, pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

2.8.
$$\frac{I_0}{I_{0M}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)^2}}$$

2.9.
$$\frac{I_0}{I_{0M}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

2.10.

$$\frac{I_0}{I_{0M}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 (1 + \varepsilon - 1 + \varepsilon)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 4.Q_0^2.\varepsilon^2}}$$

d'où
$$\frac{I_0}{I_{0M}} \approx 1 - 2.Q_0^2.\varepsilon^2$$

2.11. Les pulsations correspondant aux valeurs de ε sont dans la bande passante à -3 dB si

$$\frac{I_0}{I_{0M}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 d'où
$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 2.Q_0^2.\varepsilon^2$$
 Ceci traduit que l'acuité de la résonance ne doit pas

être trop élevée pour « laisser passer » la bande de pulsations du 2.5..

2.12. Il n'y a pas de valeur minimale de Q_0 . Il y a une **valeur maximale** pour la pulsation la plus haute qui est la plus éloignée de la résonance : Ω_2 . $\varepsilon(\Omega_2) = \Omega_2/\omega_0 = 0,02$ d'où $Q_{0max} = 19,1$.

2.13. L'intensité I_0' du signal non désiré sera d'autant plus faible que la résonance en ω_0 sera aiguë, ce qui correspond à une valeur maximale de Q_0 .

2.14. Ce critère est compatible avec le précédent pourvu que l'on choisisse la valeur maximale calculée précédemment.

2.15. On choisira donc $Q_0 = 19,1$.

$$2.16. \frac{I_0'}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+Q_0^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} < \frac{1}{10} \rightarrow 1+Q_0^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 > 100 \rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 > 0,27$$

donc la résolution nécessite celle des 2 inéquations suivantes en posant $a = (0.27)^{1/2} = 0,52$

<p>2.17. $x - \frac{1}{x} > a \rightarrow x^2 - a.x - 1 > 0$ dont les solutions sont en dehors de l'intervalle des racines. $x_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$</p>	<p>$x - \frac{1}{x} > a \rightarrow x^2 + a.x - 1 < 0$ dont les solutions sont dans l'intervalle des racines. $x_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$</p>
--	---

Soit en ne gardant que les racines positives : $x > \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ et $x < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$

soit $x \in [0 ; 0,773] \cup [1,293 ; +\infty[$

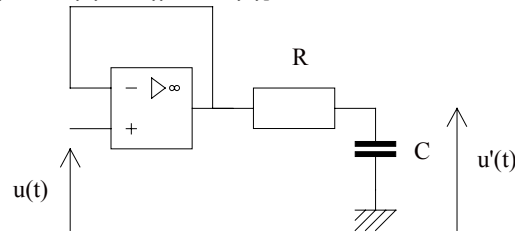
2.18. Les écarts minima $f_0' - f_0$ en fréquence entre les deux porteuses sont **-227 kHz et +293 kHz.**

3 - Démodulation du signal réceptionné.

3.1. $u(t) = H.E_0.E_1.\cos(\Omega t).\sin(\omega_0 t).\sin(\omega_0 t) = H.E_0.E_1.[\sin((\omega_0-\Omega)t) + \sin((\omega_0+\Omega)t)].\sin(\omega_0 t)/2$

$$u(t) = H.E_0.E_1.[2.\cos(\Omega t) + \cos((2.\omega_0-\Omega)t) - \cos((2.\omega_0+\Omega)t)]/4$$

3.2. On ne garde que le terme basse fréquence (modulation acoustique) en interposant un filtre passe bas de pulsation de coupure de l'ordre de $\Omega_{max} = \Omega_2$. Ce filtre peut se contenter d'être du premier ordre puisque les autres fréquences de $u(t)$ sont très supérieures à Ω_2 . Un circuit RC peut suffire.

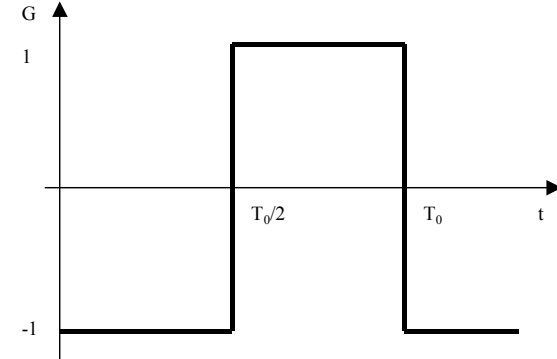


Choisissons comme fréquence de coupure 100 kHz, donc $RC = 2,5.10^{-7}$ s.

On peut choisir pour $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 0,25 \text{ nF}$.

<p>3.3. $e_2(t) = 0$</p> <p>$V_+ = e_1(t)$</p>	<p>$e_2(t) = 1$</p> <p>$V_+ = 0$</p>
--	--

$V_- = \frac{u/R + e_1/R}{1/R + 1/R} = \frac{u + e_1}{2}$ <p>A.O. en régime linéaire : $V_+ = V_-$ d'où $u = e_1$</p>	$V_- = \frac{u/R + e_1/R}{1/R + 1/R} = \frac{u + e_1}{2}$ <p>A.O. en régime linéaire : $V_+ = V_-$ d'où $u = -e_1$</p>
---	--



3.4. Le gain est un créneau symétrique impair. Les seuls termes de développement en série de Fourier non nuls sont les coefficients b_n (ou certains d'entre eux !).

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} G(t).\sin(n.\omega_0.t).dt = \frac{2}{T_0} \left[- \int_0^{T_0/2} \sin(n.\omega_0.t).dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin(n.\omega_0.t).dt \right]$$

$$b_n = \frac{1}{n.\pi} [\cos(n.\pi) - 1 - \cos(2.n.\pi) + \cos(n.\pi)]$$

$$b_n = 0 \text{ si } n \text{ pair} \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{4}{n.\pi} \text{ si } n \text{ impair}$$

$$\text{d'où } G(t) = -\frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3.\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5.\omega_0 t) + \dots \right]$$

$u(t)$ est donc bien le produit $e_1(t).e_0(t)$ pourvu que l'on filtre les ordres supérieurs à 1 en ajoutant à la sortie de l'amplificateur opérationnel un filtre passe basse de pulsation de coupure de l'ordre de ω_0 . On préférera ici un filtre du deuxième ordre pour atténuer efficacement l'ordre 3, et les suivants.