

## Etude d'une micropompe électrostatique

### Première partie : électrostatique

#### 1.1. Etude d'un fil infini uniformément chargé.

I.1.1. Le vecteur  $\vec{E}$  est contenu dans les plans de symétrie.

Or, tout plan passant par le fil est plan de symétrie ainsi que tout plan perpendiculaire au plan de symétrie. Donc

$\vec{E}$  est un vecteur radial.

I.1.2. On applique le théorème de Coulomb :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dz}{(MP)^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|}$$

Or :  $z = R \cdot \text{tg}\theta \Rightarrow dz = \frac{R}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta$

et  $MP = \frac{R}{\cos \theta}$

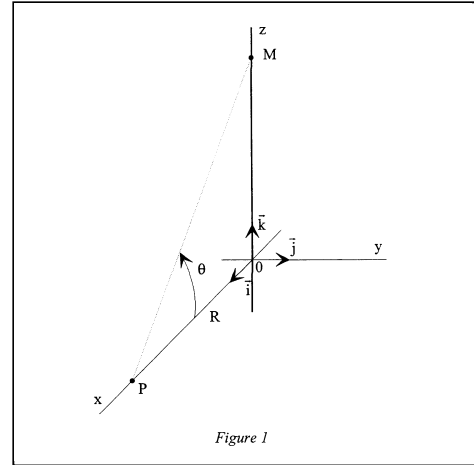
En remplaçant, il vient :  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cdot d\theta \cdot \vec{u}$

I.1.3. La composante efficace  $dE_{\text{ef}}$  du champ est sa projection sur Ox :  $dE_{\text{ef}} = dE \cdot \cos \theta \cdot \vec{i}$ .

Et  $E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_{\text{ef}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot d\theta \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \vec{i}$

I.1.4. On applique le théorème de Gauss en utilisant un cylindre de hauteur h ayant pour axe le fil :

$\frac{\lambda h}{\epsilon_0} = 2\pi R h E \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \vec{i}$



#### I.2. Etude d'une plaque infinie uniformément chargée.

I.2.1. La bande de largeur dy crée en P  $dE' = \frac{\sigma \cdot dy}{2\pi\epsilon_0 \cdot R}$

Pour des raisons de symétrie, le champ électrique est porté par Ox.

La composante efficace est donc :  $dE = \frac{\sigma \cdot dy}{2\pi\epsilon_0 \cdot R} \cdot \cos \alpha$

Avec :  $y = x \cdot \text{tg}\alpha : dy = \frac{x}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha$  et  $R = \frac{x}{\cos \alpha} \Rightarrow dE = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot d\alpha$

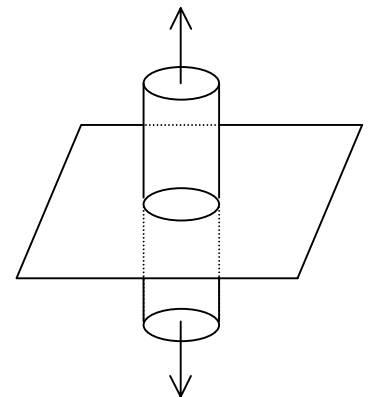
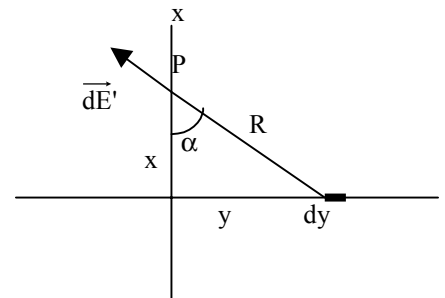
$\Rightarrow E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE$  soit  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$

I.2.2. Tout plan perpendiculaire à la plaque est plan de symétrie.

Donc  $\vec{E}$  contenu dans tous ces plans est normal à la plaque.

On applique le théorème de Gauss en utilisant comme surface fermée un cylindre de génératrices perpendiculaires à la plaque et de bases S symétriques par rapport à la plaque.

Donc :  $E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$

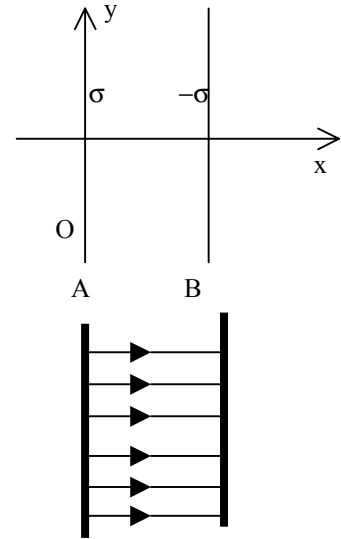


I.2.3. A.N. Avec  $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^{-2}$ ,  $\|\vec{E}\| = 4,0 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$

**I.3. Etude de deux plaques infinies uniformément chargées.**

I.3.1. Expression des champs en tout point de l'espace :

$$\begin{matrix} x < 0 : \vec{E}_A = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{i} \\ x > 0 : \vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{i} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} x < e : \vec{E}_B = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{i} \\ x > e : \vec{E}_B = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{i} \end{matrix}$$



I.3.2. En superposant les deux champs, on obtient :

$$\begin{matrix} \text{Entre les armatures : } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{i} \\ \text{A l'extérieur des armatures : } \vec{E} = 0 \end{matrix}$$

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques.

I.3.3. La différence de potentiel  $V_A - V_B$  se calcule à partir de :  $\vec{E} = -\text{grad}V$ .

Soit :  $dV = -E \cdot dx \Rightarrow V_A - V_B = E \cdot e$  ou  $V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot e$

I.3.4. A.N. Avec  $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^{-2}$  et  $e = 5 \mu\text{m}$ , on obtient :  $V_A - V_B = 40,2 \text{ V}$

I.3.5. La capacité  $C$  du condensateur formé par les deux surfaces  $S$  en regard est telle que  $C = \sigma S = CV$ .

Soit :  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

I.3.6. La force électrostatique  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la surface  $S$  d'une plaque en fonction est telle que :

$$\vec{F}_B = q_B \cdot \vec{E}_A \text{ soit } F = -\sigma S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \vec{F}_B = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot S \vec{i} = -\vec{F}_A$$

I.3.7. La pression électrostatique  $P_{el}$  définie comme le module

de la force par unité de surface  $P_{el} = \frac{F}{S}$  vaut donc :  $P_{el} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

I.3.8. A.N. Pour  $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^{-2}$   $P_{el} = 286 \text{ N.m}^{-2}$

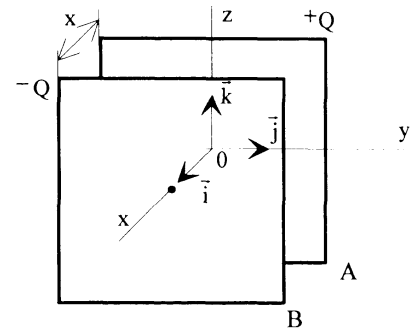


Figure 2

**Deuxième partie : étude d'un condensateur**

**II.1. Etude à charge Q constante**

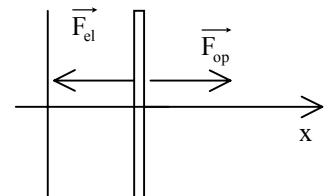
II.1.1. L'énergie électrostatique  $\mathcal{E}$  est égale au travail fourni par l'opérateur pour apporter les charges de l'infini jusque sur les armatures.

Soit un état intermédiaire où les charges sont  $yQ$  et le potentiel  $yV$  ( $y < 1$ ).

Apportons depuis l'infini la charge  $Q \cdot dy$ . Cette charge passe u potentiel nul de l'infini au potentiel  $yV$ . Le travail fourni est donc :  $dW = yV \cdot Q \cdot dy$  et par conséquent :  $d\mathcal{E} =$

$$yV \cdot Q \cdot dy \Rightarrow \mathcal{E} = \int_0^1 QV \cdot y \cdot dy = QV \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} QV$$

Avec  $Q = VC$ , on obtient :  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  soit  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot x}{\epsilon_0 S}$



II. 1.2. Le travail  $\delta W_{op}$  fourni par l'opérateur sert à augmenter l'énergie du condensateur; donc :  $d\mathcal{E} = \delta W_{op}$

Avec  $\delta W_{el} = \delta W_{el}$ , il vient :  $d\mathcal{E} = -\delta W_{el}$

II.1.3. Pour un déplacement  $dx$ , on explicite  $\delta W_{op}$  :  $\delta W_{op} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \cdot dx = F_{op} \cdot dx \Rightarrow \vec{F}_{op} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \cdot \vec{i}$

II.1.4. On en déduit l'expression du vecteur  $\vec{F}_{el} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \cdot \vec{i}$

**II.2. Etude à tension constante.**

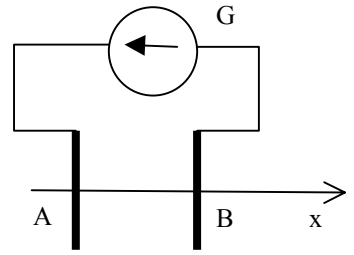
II.2.1. Lorsque la charge du condensateur varie de  $\delta Q$ , le générateur fournit l'énergie :

$\delta W_G = U \cdot \delta Q$

Avec  $E = \frac{1}{2} QU$ , il vient :

$dE = \frac{1}{2} U \cdot \delta Q$

On a donc :  $\delta W_G = 2 \cdot dE$  avec  $E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S \cdot U^2}{x}$



II.2.2. L'augmentation d'énergie du condensateur est égal à la somme des énergies fournies par le générateur et l'opérateur. Soit :  $\delta W_G + \delta W_{op} = dE$

II.2.3. En remplaçant  $\delta W_G$  par l'expression de II.2.1 il vient :  $\delta W_{op} = -dE$

Soit :  $F_{op} \cdot dx = -F_{el} \cdot dx = -dE$  ou  $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el} = -\frac{dE}{dx} \cdot \vec{i}$

En dérivant la relation  $E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S \cdot U^2}{x}$ , on obtient :  $\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} U^2 = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C x}$ . Donc  $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} U^2 \cdot \vec{i}$

Cette relation s'écrit aussi :  $\vec{F}_{op} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \cdot \vec{i}$  On retrouve le même résultat qu'à la question II.1.

II.2.4. A.N. Pour  $U = 40V$ ,  $x = 5 \mu m$  et  $S = 12,56 mm^2$  il vient :  $\|\vec{F}_{el}\| = 3,55 mN$

**II.3. Etude de l'équilibre des plaques d'un condensateur et d'un ressort.**

II.3.1.1. Force d'élasticité exercée par un ressort :

$\vec{F}_R = k(e-x) \cdot \vec{i}$

II.3.1.2. La position  $x = 0$  est une position d'équilibre stable car la force électrostatique devient très grande mais l'armature fixe empêche l'armature mobile de se déplacer. Il apparaît une force de réaction de l'armature fixe sur l'armature mobile.

La cale collée sur l'armature fixe est équivalente à un diélectrique et empêche les deux armatures de venir en contact.

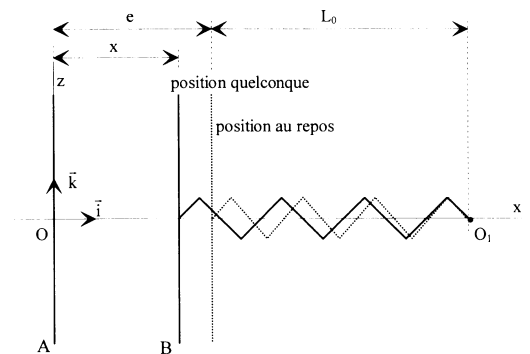
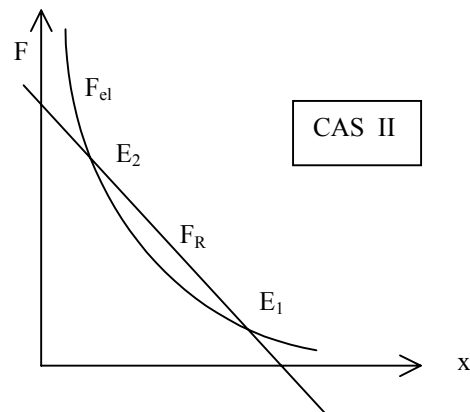
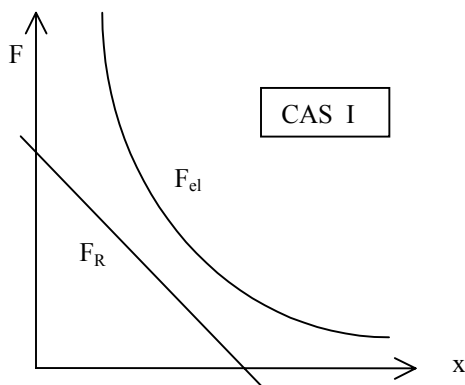


Figure 3

II.3.1.3. Les deux forces à considérer sont :

$F_R = k(e-x)$  et  $F_{el} = \frac{CU^2}{2} \frac{1}{x}$

Deux cas peuvent se rencontrer selon que les deux courbes se coupent ou non.



- Cas I : les deux courbes ne se coupent pas; les deux forces ne sont jamais égales.  
La seule position d'équilibre est  $x = 0$ .
- Cas II : les deux courbes se coupent en deux points  $E_1$  et  $E_2$ ; en ces points les deux forces sont égales en norme et opposées; on a donc deux positions d'équilibre.  
 En  $E_1$ , si on écarte légèrement l'armature mobile de sa position d'équilibre en augmentant  $x$ , on constate que  $F_{el} > F_R$ ; donc le résultante des forces a tendance à ramener le système vers l'équilibre.  
 Donc :  $E_1 = \text{Equilibre stable}$   
 En  $E_2$ , les propriétés sont inversées. Donc :  $E_2 = \text{Equilibre instable}$

On peut retrouver ces résultats par un calcul classique en déterminant le signe de la dérivée seconde de l'énergie.

II.3.1.4. Le cas limite est celui où les deux courbes sont tangentes.

L'équation  $F_{el}(x) = F_R(x)$  qui a en général 3 racines dont une racine négative, possède alors deux racines positives confondues et les deux courbes admettent la même tangente au point de contact. On a donc :

$$k(e-x) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U^2}{x^2} \quad (1) \quad \text{et en dérivant : } -k = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{x^3} \quad (2)$$

La combinaison des relations (1) et (2) donne :  $\frac{\epsilon_0 S U^2}{x^3} (e-x) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U^2}{x^2} \Rightarrow 2(e-x) = x \Rightarrow x_\ell = \frac{2e}{3}$

D'où :  $k \left( e - \frac{2e}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S U_{cl}^2}{\left( \frac{2e}{3} \right)^2} \Rightarrow U_{cl} = \sqrt{\frac{8ke^3}{27\epsilon_0 S}}$

II. 3.1.5. A.N. Pour  $k = 1,18610^4 \text{ Nm}^{-1}$  et  $e = 5 \mu\text{m}$  on obtient :  $U_{cl} = 62,9 \text{ V}$

### II.3.2. Prise en compte de la cale isolante.

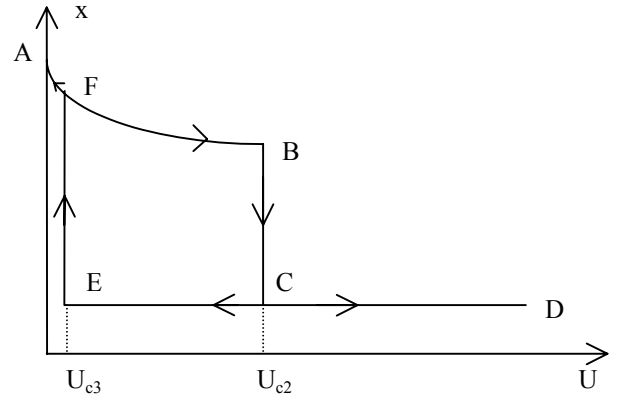
II.3.2.1. Le système est équivalent à deux condensateur en série; donc :  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{air}} + \frac{1}{C_{dié}}$

Soit :  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \left[ (e-e_1) + \frac{e_1}{\epsilon_r} \right] = \frac{e_{equi}}{\epsilon_0 S} \Rightarrow e_{equi} = e - e_1 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$

II.3.2.2. Posons  $x_0 = e_1 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$  et  $K = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2}$

II.3.2.6. Lorsque  $U$  varie, on obtient les variations correspondantes de  $x$  représentées ci-contre :

- AB : équilibre stable de l'armature mobile; ceci est possible tant que  $U \geq U_{e2}$
- BC : pour  $U > U_{e2}$ ,  $F_{el} > F_R$ ; l'équilibre n'est plus possible sinon pour  $x = e_1$
- CD et DE : l'armature mobile reste collée sur le diélectrique
- EF : la force électrique devient inférieure à celle exercée par le ressort, mais la position E correspondante est instable; le système évolue jusqu'en F correspondant à une position d'équilibre stable
- FA : équilibre stable.



**Troisième partie : Etude d'un condensateur à membrane**

**III.1. Déformation d'une membrane circulaire.**

III.1.1. Le maximum de la déformée se produit en  $r$

$$=0 \text{ soit : } (w(r))_{\max} = \frac{pR^4}{64D}$$

III.1.2. A.N. Pour  $R = 2 \text{ mm}$ ,  $p = 283 \text{ Pa}$  et  $D = 2,36 \cdot 10^{-4} \text{ J}$   $(w(r))_{\max} = 0,3 \mu\text{m}$

III.1.3. On part de la relation  $F = p \cdot S$ .

$w$  est un déplacement donc une longueur. La raideur  $k$  d'un ressort est donc telle que :

$$k = \frac{F}{w} = \frac{pS}{w} \Rightarrow \frac{k}{S} = \frac{p}{w(r)} = \kappa(r)$$

Tout comme un ressort, la membrane possède de l'élasticité. Mais cette propriété est répartie sur l'ensemble de sa surface.

Il est donc justifiée de définir un coefficient d'élasticité par unité de surface; c'est le paramètre  $\kappa(r)$ .

$$\text{III.1.4. } \kappa(0) = \frac{64D}{R^4} = 9,4 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-3}$$

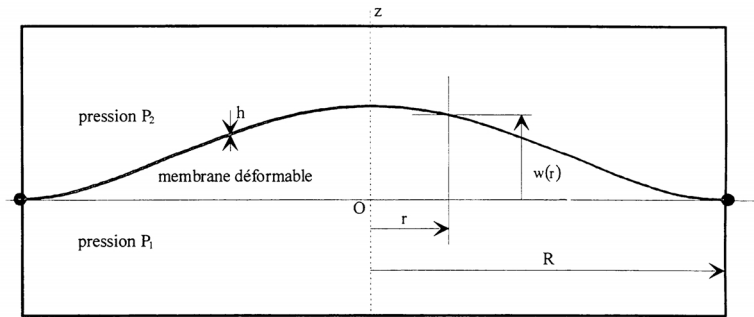


Figure 4

**III.2. Etude d'un condensateur à membrane.**

III.2.1. La pression électrostatique  $P_0 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

s'écrit aussi :  $P_0 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2e^2}$  car  $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon_0 U}{e}$

En remplaçant, il vient :

$$(w(r))_0 = \frac{\epsilon_0 U^2}{128e^2 D} (R^2 - r^2)^2$$

III.2.2. En appliquant la même relation, il

vient :  $P_1 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2[e - (w(r))_0]^2}$

III.2.3. Pour obtenir  $(w(r))_1$ , on remplace  $P_0$  par  $P_1$  dans la relation donnant  $(w(r))_0$ . Il vient :

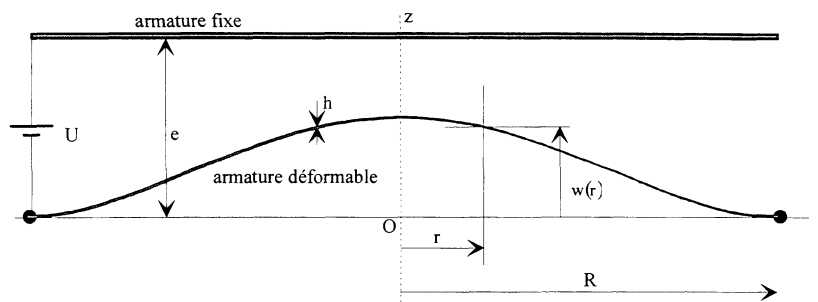


Figure 5

$$(w(r))_1 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2[e-(w(r))_0]^2} \frac{(R^2 - r^2)^2}{64.D} \Rightarrow \boxed{(w(r))_1 = \frac{e^2 \cdot (w(r))_0}{[e-(w(r))_0]^2}}$$

III.2.4. De la même manière :  $\boxed{(w(r))_n = \frac{e^2 \cdot (w(r))_0}{[e-(w(r))_{n-1}]^2}}$

III.2.5. A la limite  $(w(r))_n = (w(r))_{n-1} = w(r)$ .

Donc :  $w(r)[e-w(r)]^2 = w(r)e^2$  ou  $\boxed{(w(r))^3 - 2e \cdot (w(r))^2 + e^2 \cdot w(r) - e^2 (w(r))_0 = 0}$

On obtient bien une relation de la forme :  $(w(r))^3 + a(w(r))^2 + bw(r) + c(w(r))_0 = 0$  avec :  $\boxed{a=-2e}$   $\boxed{b=e^2}$   $\boxed{c=-e^2}$

En II.3.1.4, on a trouvé l'épaisseur critique  $x = \frac{2e}{3}$ .

Le même raisonnement conduit à la valeur de  $w(0)$  critique telle que  $w(0) + \frac{2e}{3} = e \Rightarrow \boxed{w(0) = \frac{e}{3}}$

Dans ces conditions, on a :  $\frac{e}{3} = \frac{2e}{3} \left[ 1 - \cos \left( \frac{1}{3} \text{Arcos} \left( 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} \right) \right) \right]$

Soit :  $\frac{1}{2} = 1 - \cos \left( \frac{1}{3} \text{Arcos} \left( 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} \right) \right) \Rightarrow \cos \left( \frac{1}{3} \text{Arcos} \left( 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} \right) \right) = \frac{1}{2}$

Soit :  $\frac{1}{3} \text{Arcos} \left( 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} \right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{Arcos} \left( 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} \right) = \pi \Rightarrow 1 - \frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} = -1$

Soit :  $\frac{27\tilde{a}_0 U^2 R^4}{256e^3 D} = 2 \Rightarrow \boxed{U_{c4} = \sqrt{\frac{512e^3 D}{27\tilde{a}_0 R^4}}}$

III.2.7. A.N. Pour:  $R = 2\text{mm}$  et  $D = 2,36 \cdot 10^{-4} \text{ J}$   $\boxed{U_{c4} = 62,9 \text{ V}}$

**Quatrième partie : Etude d'un convertisseur à capacité variable.**

**IV.1. Etude sur la première demi-période**

IV.1.1. La diode  $D_1$  est passante si  $E_1 > u = \frac{q(0^+)}{C_1}$ .

$$\boxed{E_1 > \frac{q(0^+)}{C_1}}$$

IV.1.2.  $u < E_1 < E_2 \Rightarrow E_2 > u \Rightarrow \boxed{D_2 \text{ est bloquée}}$

IV.1.3. On exprime de deux manières différentes la tension aux bornes de  $R_1$  :

$$E_1 - \frac{q}{C_1} = R_1 i_1 \quad \text{avec} \quad i_1 = \frac{dq}{dt}$$

Soit :  $\boxed{R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_1} = E_1}$

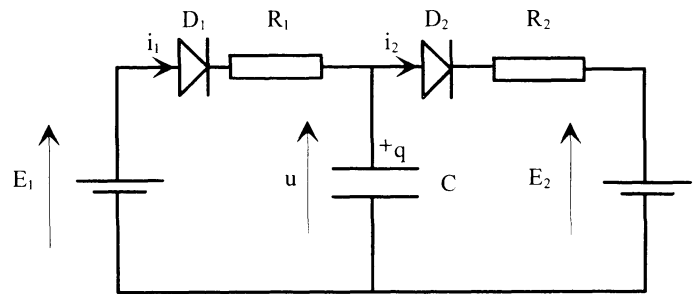


Figure 6

IV.1.4. La solution de cette équation est la somme d'une solution particulière  $q_p$  et de la solution de l'équation sans second membre  $q_G$ . On a :

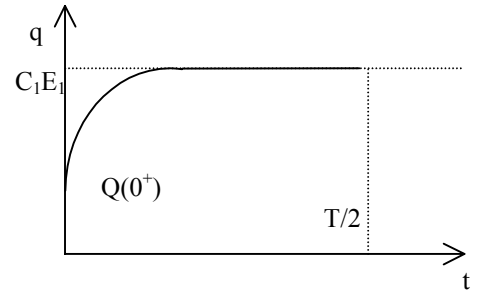
$$q_p = C_1 E_1 \quad \text{et} \quad q_G = \lambda \cdot \exp \left( -\frac{t}{R_1 C_1} \right) \quad (\lambda = \text{constante à déterminer par les conditions initiales}).$$

Donc  $q = C_1 E_1 + \lambda \cdot \exp \left( -\frac{t}{R_1 C_1} \right)$  et, à  $t = 0$ ,  $q = q(0^+) \Rightarrow \lambda = q(0^+) - C_1 E_1$

Finalement :  $\boxed{q = C_1 E_1 - (C_1 E_1 - q(0^+)) \exp \left( -\frac{t}{\tau_1} \right)}$

A  $t = \frac{T}{2}$  :  $q\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = C_1 E_1 - (C_1 E_1 - q(0^+)) \exp\left(-\frac{t}{2R_1 C_1}\right)$ .

Avec  $\tau_1 = R_1 C_1 \ll \frac{T}{2}$  :  $\exp\left(-\frac{t}{2R_1 C_1}\right) \ll 1$  et  $q\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) \approx C_1 E_1$



IV.1.5. La courbe  $q = f(t)$  est représentée ci-contre.

**IV.2. Etude sur la deuxième demi-période** (de  $t = (T/2)^-$  à  $t = T^-$ )

IV.2.1. La charge du condensateur est continue, donc :  $q\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = q\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = C_1 E_1$

IV.2.2. L'énoncé précise :  $C_1 > C_2$  et  $C_1 E_1 > C_2 E_2$  ; et  $u = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1 E_1}{C_2}$

Donc  $u > E_1 \Rightarrow$  D<sub>1</sub> est bloquée et  $u < E_2 \Rightarrow$  D<sub>2</sub> est passante

IV.2.3. L'équation s'obtient de la même manière qu'en IV.1.3 :

$$\frac{q}{C_2} - E_2 = R_2 i_2 \quad \text{avec} \quad i_2 = -\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_2} = E_2}$$

IV.2.4. La solution de cette équation est la somme d'une solution particulière  $q_p$  et de la solution de l'équation sans second membre  $q_G$ . On a :

$$q_p = C_2 E_2 \quad \text{et} \quad q_G = \lambda \exp\left(-\frac{t}{R_2 C_2}\right) \quad (\lambda = \text{constante à déterminer par les conditions initiales}).$$

Donc  $q = C_2 E_2 + \lambda \exp\left(-\frac{t}{R_2 C_2}\right)$  et, à  $t = \frac{T}{2}$ ,  $q = C_1 E_1$   $q(T) = C_1 E_1$   $\lambda = (C_1 E_1 - C_2 E_2) \exp\left(\frac{T}{2\tau_2}\right)$

Finalement :  $q = C_2 E_2 + (C_1 E_1 - C_2 E_2) \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau_2}\right)$

IV.2.5. Avec  $\tau_2 = R_2 C_2 \ll \frac{T}{2}$ ,  $q(T) = C_2 E_2$  et  $q(0^+) = q(T) \Rightarrow$   $q(0^+) = C_2 E_2$

IV.2.6. D'où les courbes :

