I Banque PT 2009 A (Extrait)

A I Distributions orthoradiales de courant électrique

1°) **Distribution volumique** : $\vec{j_1} = \alpha r \vec{u}_\theta$

Arguments de symétrie :

- $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$: plans de symétrie + $\vec{B}_1$ pseudo-vecteur => $\vec{B}_1 = f(M)\vec{u}_z$
- $\vec{j}_1(M) = \alpha r\, \vec{u}_\theta = j(r)\, \vec{u}_\theta \rightarrow f(M) = f(r)$ puisque $\partial/\partial_\theta = 0$; $\partial/\partial_z = 0$ invarience par translation et par rotation

Théorème de Stokes

Sous sa forme intégrale : $\oint \vec{B}_1.\vec{d\ell} = \iint \overrightarrow{Rot}\left(\vec{B}_1\right).\vec{\delta S} = \mu_o \iint \vec{j_1}.\vec{\delta S}$ puisque $\vec{j_d} := \varepsilon_o \partial\vec{E}/\partial t = 0$

Contour rectangulaire : $A(r,0,0); B(r,0,H); C(R,0,H); D(R,0,0)$ avec $r < a$; $R > a$

La circulation se limite au seul terme : $\int_A^B \vec{B}_1.\vec{d\ell} = f(r) \times H$

Le flux de $\vec{j_1}$ (= courant enlacé) se limite à :$\iint \vec{j_1}.\vec{\delta S} = \int_{u=r}^{u=a} \alpha u \times H du = \alpha(a^2 - r^2)H/2 \rightarrow$

$$\left\|\vec{B}_1\right\| = f(r) = \mu_o \alpha \times \frac{a^2 - r^2}{2}$$

Remarque :Si l'on avait donné l'expression du rotationnel en coord cylindrique, on aurait pu utiliser la forme locale du théorème :

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_o \vec{j}$$

En coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{B}\right) = \begin{matrix} [\partial_\theta B_z - \partial_z(rB_\theta)]/r \\ [\partial_z B_r - \partial_r B_z] \\ [\partial_r(rB_\theta) - \partial_\theta B_r]/r \end{matrix} \rightarrow \text{(symétries)} : -\partial_r B_z = \mu_o j_\theta = \mu_o \alpha r$$

que l'on intègre avec la CL $B_z(a) = 0$

2°) **Distribution surfacique**

Un champ uniforme possède des dérivées spatiales nulles =>$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{B}\right) = 0$; $Div\left(\vec{B}\right) = 0$ "satisfaisant"

Le champ uniforme est "satisfaisant" , maintenant on n'a absolument pas montré que c'était LA bonne solution ...

Dans ce type de problème ce sont justement les CL (courant surfacique cylindrique uniforme ici) qui justifient LA solution.

La relation de passage $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{u}_{12}$ donne $\vec{B}_o = \mu_o j_s \vec{u}_z$ $(r < a)$

A II Four à induction

1°)

$$\vec{B}_o = \mu_o j_s \vec{u}_z = \mu_o \frac{N}{H} i(t)\, \vec{u}_z = \mu_o K I_m cos(\omega t)\, \vec{u}_z$$

2°)**Arguments de symétrie** :

- $\{\vec{u}_r, \vec{u}_z\}$: plans d'antisymétrie + $\vec{E}_1$ vrai-vecteur => $\vec{E}_1 = f(M,t)\vec{u}_\theta = f(r,t)\vec{u}_\theta$

On applique donc "Maxwell- Faraday" intégral : cercle d'axe Oz et de rayon r

On peut à nouveau appliquer la forme locale avec le rotationnel en coord cylindriques :

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{E}\right) = -\partial \vec{B}/\partial t$$

On trouve :

$$E_1(r,t) = \frac{K I_m \omega}{2} r\, sin(\omega t) = \frac{j_1(r,t)}{\gamma}$$

3°) **Bilan de puissance** : effet Joule local puis intégré : chauffage par courants de Foucault

$$p_J = \frac{j_1^2(r,t)}{\gamma}\ [W.m^{-3}]$$

$$P_J = \int p_J \times d\tau \quad \text{avec (symétrie) } d\tau = 2\pi rHdr \text{ et } 0 \le r \le a$$

$$P_J(t) = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^2}{8} V sin^2(\omega t) \quad \text{avec } V = \pi a^2 H$$

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma K^2 I_m^2 \omega^2 a^2}{16} V \quad \text{puisque } \langle sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Fusion du matériau

La chaleur nécessaire à la fusion du matériau (y compris les pertes) vaut $Q = M \times \Delta_{fus}h \times (1+\eta)$

Elle est fournie par la "chaleur Joule" $Q = \langle P_J \rangle t_f \rightarrow t_f \approx 335\,s$

Question annexe :

Il est intéressant de contrôler ici l'hypothèse : champ magnétique induit par les courants de Foucault négligeable devant le champ inducteur.

En effet, nous nous trouvons précisément dans le cas étudié en I 1°) avec le coefficient :

$$\alpha = \frac{\gamma K I_m \omega}{2} sin(\omega t)$$

On en déduit alors facilement le champ $\vec{B}_1(r)$, il est maximum sur l'axe $(r = 0)$

$$B_{1m} = \mu_o \alpha \times \frac{a^2}{2}$$

Que l'on peut comparer au champ $B_o = K\ I_m cos(\omega t)$

Ces champs sont en quadrature, comparons leurs amplitudes :

$$\lambda = \frac{B_{1Max}}{B_{oMax}} = \frac{\mu_o \gamma \omega}{2} \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2$$

Où l'on a introduit l'épaisseur de peau (cf sujet Banque PT 2009 B partie I B) :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \gamma \omega}} = 6,3\,mm \ll a = 150\,mm \Rightarrow \lambda = 280\,!!$$

On en conclut qu'il n'est absolument pas possible ici de négliger les effets des courants induits.

En pratique, l'autoinduction limite la pénétration du champ B_o sur une couche superficielle d'épaisseur de l'ordre de δ

Le cylindre ne fondra donc pas "en masse" mais plutôt en surface.

La résolution "exacte" nécessite l'usage des équations de Maxwell et aboutit à des fonctions de type Bessel (harmoniques cylindriques)

III Alimentation électrique du four

1°) Questions élémentaires ne nécessitant pas de remarques particulières. On trouve :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{U_m}{Z} exp[j(\omega t - \phi)]$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L\,;\ Z = Mod(\underline{Z}) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,;\ \phi = Arg(\underline{Z}) = arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,;\ I := \sqrt{\langle i^2 \rangle} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ en régime sinusoïdal}$$

la puissance moyenne transférée (puissance active) est la puissance Joule dissipée par R

$$P = R\langle i^2\rangle = RI^2 = \frac{R}{R^2+\omega^2L^2}\frac{U_m^2}{2}$$

$$TP = \frac{P(\omega)}{P(0)} = \frac{1}{1+(\omega L/R)^2} = \frac{1}{17} = 5,88\,\%$$

2°) Amélioration du facteur de puissance

Il suffit de modifier la partie imaginaire de $\underline{Z}$: $\omega L \to \omega L - 1/\omega C$

$$TP = \frac{1}{1+[(\omega L - 1/\omega C)/R]^2}$$

$$\omega^2 LC_o = 1 \to C_o = 100\,nF;\ TP = 1$$

$$\underline{Z} = R + 0\times j \to \phi = 0\ \ I_m = \frac{U_m}{R}$$

B Effets thermiques

Illustrons l'élégance de l'approche locale des lois de la physique

Au sein du ruban :

- régime permanent $\partial/\partial t = 0$
- transfert thermique unidirectionnel (x) → $T(x), \vec{j}_{th} = -\lambda\, dT/dx\, \vec{u}_x = j_{th}(x)\vec{u}_x$

-source de chaleur uniforme et permanente (effet Joule) de densité : $p = j_o^2/\gamma \quad [W.m^{-3}]$

Bilan énergétique sur un domaine quelconque : flux de chaleur sortant = puissance interne

Traduction volumique

$$Div\left(\vec{j}_{th}\right) = p \to \frac{d}{dx}j_{th}(x) = p \to j_{th} = p\,x + Cste$$

$$j_{th}(e) = 0\,(\text{isolant}) \to j_{th} = p\,(x-e)$$

$$j_{th}(0)\ := -p\,e \underset{Continuit\acute{e}}{=} -h(T_p - T_e) \Longrightarrow T_p = T(0) = T_e + \frac{p\,e}{h} = T_e + \frac{j_o^2 e}{\gamma h}$$

L'axe x a été orienté de manière à avoir $j_{th}(x) < 0$ (it's a pity...)

Intégrons l'expression de $j_{th}(x)$ pour obtenir $T(x)$ dans le câble :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{j_{th}}{\lambda} \to T(x) = T(0) + \int_o^x -\frac{p\,(x-e)}{\lambda}dx = T_e + \frac{j_o^2 e}{\gamma h} - \frac{j_o^2}{\gamma\lambda}\left(\frac{x^2}{2} - x\,e\right)$$

La température est maximale en $x = e$

$$T_{max} = T(e) = T_e + \frac{j_o^2 e}{\gamma}\left(\frac{1}{h} + \frac{e}{2\lambda}\right)$$

Problème équivalent mais de présentation plus élégante.

Soit une tranche infinie (selon y et z) de matériau conducteur, d'épaisseur $2e$. La tranche s'étend sur l'intervalle $-e \le x \le e$

Cette tranche est parcourue selon z par un courant électrique de densité uniforme $\vec{j}_o = j_o\,\vec{u}_z\,[A.m^{-2}]$

L'effet Joule provoque une production de chaleur de densité uniforme d'expression $p_J = j_o^2/\gamma\,[W.m^{-3}]$

La tranche possède une conductivité thermique constante $\lambda[W.m^{-1}.K^{-1}]$

Elle est plongée dans l'air de température T_{ext} , sur les faces $x = e$ et $x = -e$ on tient compte d'une convection caractérisée par un coefficient de Newton $h\,[W.m^{-2}.K^{-1}]$

On cherche la répartition de température $T(x)$ en régime permanent.

Par raison de symétrie $j_{th}(x) = -j_{th}(-x)$ et $T(x) = T(-x)$, donc :

$$j_{th} = p\,x \quad \text{puis} \quad T = T(0) - \frac{p}{2\lambda}x^2 \to T(\pm e) = T(0) - \frac{p}{2\lambda}e^2 \text{ : profil parabolique}$$

convection en $x = \pm e \to T(\pm e) = T_{ext} + \frac{j_{th}(e)}{h} = T_{ext} + \frac{p\,e}{h}$

température maximale : $T(0) = T_{ext} + \frac{p\,e}{h} + \frac{p}{2\lambda}e^2$