

## THERMODYNAMIQUE

### Irréversibilité dans une turbine à gaz

*Ce sujet traite un cycle classique de turbine à gaz mais en s'intéressant tout particulièrement aux irréversibilités. Il demande de calculer des "variations d'entropie dues à l'irréversibilité" et des rendements indiqués polytropiques. Le rôle des frottements mécaniques dans la production d'entropie est délicat à modéliser et justifie les rappels théoriques assez longs concernant la question 5 : "étude de l'irréversibilité".*

#### Etude d'une évolution polytropique

##### Question 1

On nous propose de démontrer l'implication suivante :

$$T.ds = c_p.dT - P.v^k = Cste$$

dans l'évolution d'un gaz parfait à capacités calorifiques constantes.

On raisonne sur l'unité de masse et on donne les valeurs numériques des capacités calorifiques :

$$c_p = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{kg}^{-1} \quad ; \quad c_v = 0,714 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

On en déduit immédiatement le rapport :

$$\frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

et la constante massique du gaz parfait :

$$r = c_p - c_v = 0,286 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

D'après le second principe et les définitions des coefficients calorimétriques, on a :

$$T.ds = q_r - c_v.dT = .dV = c_p.dT = h.dP$$

De plus, les relations de Clapeyron appliquées aux gaz parfaits donnent :

$$P ; h = v$$

Finalement :

$$\begin{aligned} T.ds &= c_p.dT \\ q_r - c_v.dT &= P.dv = c_p.dT = v.dP \\ P.dv &= c_p - c_v .dT \\ v.dP &= c_p - c_v .dT \end{aligned}$$

Différentions l'équation d'état massique  $Pv = rT$

$$dT = \frac{Pdv - vdP}{r}$$

Remplaçons dans l'expression de  $Pdv$  obtenue précédemment :

$$P.dv = c_p - c_v .dT = c_p - c_v \frac{Pdv - vdP}{r}$$

Divisons par le produit  $Pv$  et réorganisons les termes :

$$1 - \frac{r}{c_p - c_v} \frac{dv}{v} = \frac{dP}{P} = 0$$

Notons  $k$  le facteur  $1 - r / (c_p - c_v)$ , l'intégration est immédiate :

$$k \frac{dv}{v} = \frac{dP}{P} \quad 0 \quad k \ln v = \ln P = \text{Cste} \text{ ou encore } Pv^k = \text{Cste}$$

On a bien retrouvé une loi polytropique d'exposant :

$$k = 1 + \frac{r}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - r}$$

### Question 2

Examinons les différentes transformations classiques :

#### isotherme

$$dT = 0 \text{ or } q_r = T.ds = c_p.dT = 0 \quad c_p = 0 \quad ; k = 1 \text{ soit } Pv = \text{Cste} \quad rT$$

#### isobare

$$P = \text{Cste} \text{ et } P.v^k = \text{Cste} \quad k = 0 \text{ soit } c_p = c_v$$

#### isochore

$$v = \text{Cste} \text{ et } P^{1/k}.v = \text{Cste} \quad 1/k = 0 \text{ soit } c_p = c_v$$

#### isentropique

$$ds = 0 \text{ or } dT = 0 \quad c_p = 0 \quad k = \frac{c_p}{c_v} \quad ; Pv = \text{Cste} \quad (\text{Laplace})$$

On retrouve les résultats classiques attendus.

### Question 3

Dans le diagramme entropique (T,s), le long d'une polytropique, on a :

$$c_p.dT = T.ds = \frac{dT}{T} = \frac{ds}{c} \\ \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) = \frac{s - s_1}{c} \text{ soit } T = T_1 \exp\left(\frac{s - s_1}{c}\right)$$

L'évolution est donc exponentielle dans le diagramme entropique, sauf bien sûr dans les cas particuliers de l'isotherme ou de l'isentropique, ( $c = 0$  ou  $c = \infty$ ), pour lesquelles on retrouve des évolutions rectilignes.

D'après la relation exprimant la chaleur reçue dans une **transformation réversible** :

$$q_r = \int_{s_1}^{s_2} T.ds = \int_{s_1}^{s_2} T_1 \exp\left(\frac{s - s_1}{c}\right) ds$$

La chaleur reçue est mesurée par l'aire sous la courbe (entre la courbe et l'axe des entropies).

## Etude d'une turbine à gaz simple

### Question 4 : bilan classique

Le premier principe, appliqué aux écoulements permanents s'écrit (bilan massique) :

$$h_c + e_c + e_p = w_i + q_e$$

Pour un gaz parfait à capacités calorifiques constantes, on a simplement :

$$h = c_p \cdot T$$

Pour les A.N., si l'on mesure l'enthalpie massique en  $\text{kJ.kg}^{-1}$  et  $T$  en  $K$ , alors  $c_p = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$

D'après les hypothèses, on peut poser :

$$e_c = e_p = 0$$

Enfin,  $w_i$  et  $q_e$  représentent respectivement le travail et la chaleur massiques reçus dans l'évolution.

4.a Travail massique indiqué de compression ( $q_e = 0$  : adiabatique )

$$w_{ic} = c_p \cdot (T_2 - T_1) = 576 - 293 = 283 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4.b Travail massique indiqué de détente ( $q_e = 0$  : adiabatique )

$$w_{it} = c_p \cdot (T_4 - T_3) = 760 - 1260 = -500 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4.c Travail massique utile disponible à l'alternateur

Si l'on néglige toute perte mécanique, on a simplement :

$$w_u = w_{ic} - w_{it} = 217 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4.d Chaleur massique fournie par l'échangeur ( $w_i = 0$  : pas de pièce mobile )

$$q_{2-3} = c_p \cdot (T_3 - T_2) = 1260 - 576 = 684 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4.e Rendement thermique de l'installation

$$\eta_{th} = \frac{w_u}{q_{2-3}} = 0,317$$

Alors que le rendement de Carnot entre les températures extrêmes vaut :

$$\eta_{ca} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{1260 - 293}{1260} = 0,767$$

Le rendement de l'installation est bien inférieur au rendement théorique de Carnot.

## Question 5 - Etude de l'irréversibilité

### 5.a Première présentation

#### Rappel théorique

L'entropie d'un système est une fonction d'état, bien connue dans le cas d'un gaz parfait à capacités calorifiques constantes. Si l'on utilise comme variables d'état la pression et la température, la variation d'entropie massique entre deux états  $i$  et  $f$  s'écrit :

$$s = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - r \cdot \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) \quad \text{avec ici : } c_p = 1 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ; r = c_p - c_v = 0,286 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

*Variation indépendante du caractère réversible ou non de la transformation !*

Si le système reçoit la chaleur élémentaire  $q$  de la part d'un thermostat à la température  $T_0$ , alors la variation d'entropie du thermostat vaut simplement :

$$ds_0 = \frac{q}{T_0}$$

Si l'échange est totalement réversible, (thermiquement mais aussi mécaniquement, chimiquement,...) alors le second principe stipule qu'il n'y a pas de création d'entropie et que la variation d'entropie du système  $ds$  est simplement l'opposée de  $ds_0$ , on parle alors d'entropie "échangée" et l'on écrit (point de vue du système) :

$$ds = ds_e = \frac{q}{T_0} - \frac{q}{T} \quad (\text{la réversibilité thermique impose } T = T_0)$$

Si l'échange n'est pas réversible, il y a création d'entropie (l'entropie de "l'univers" augmente) et l'on a :

$$ds = ds_0 = ds_{\text{création}} = 0 \quad \text{soit} \quad ds = \frac{q}{T_0} \quad (\text{on n'a plus forcément } T = T_0 !)$$

Lors d'une transformation adiabatique, comme dans la compression ou dans la détente du problème, on a :

$$q = 0 \quad ds_0 = 0 \quad ds = ds_{\text{création}} = 0$$

Il est donc facile dans ces deux transformations de calculer "la variation d'entropie due à l'irréversibilité" :

**Compresseur :**

$$s_{cr} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 0,0707 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

**Turbine :**

$$s_{cr} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) - r \cdot \ln\left(\frac{P_4}{P_3}\right) = 0,0892 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

**Echangeur :**

Cette fois, la transformation n'est pas adiabatique et l'on ne connaît pas la température de la source.

Le plus simple est d'imaginer que la source chaude de l'échangeur est un thermostat à la température minimale possible soit  $T_0 = 1260 \text{ K}$ . Sa variation d'entropie lorsqu'il cède  $q_{2-3}$  au système vaut :

$$s_0 = \frac{q_{2-3}}{T_0} = \frac{684}{1260} = 0,5428 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

La variation d'entropie du gaz vaut par ailleurs :

$$s = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - r \cdot \ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) = 0,7933 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

L'entropie créée vaut alors :

$$s_{cr} = s_0 - s = 0,2504 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Une autre possibilité serait que l'examinateur se soit plutôt intéressé aux frottements dans les canalisations de l'échangeur puisqu'il a pris soin d'indiquer une pression de sortie  $P_3 = 8 \text{ bars}$  inférieure à la pression d'entrée  $P_2 = 8,3 \text{ bars}$ . Cette chute de pression est connue en mécanique des fluides sous le nom de pertes de charge. La seconde présentation qui s'intéresse aux "chaleurs de frottements" semble confirmer ce point de vue.

Décomposons alors assez arbitrairement notre échangeur réel en un échangeur idéal amenant l'air à la même température finale ( $T_3 = 1260 \text{ K}$ ) mais sans chute de pression ( $P_3 = 8 \text{ bars}$ ) suivi d'un "élément non idéal" (tuyauterie avec frottements...) faisant chuter la pression de manière isotherme. Le caractère isotherme d'une telle tuyauterie découle des hypothèses :  $w_i = q_e = 0$  et donc :  $h = c_p \cdot T = 0$ . La variation d'entropie dans cette tuyauterie vaudra simplement :

$$s = r \ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) = 0,286 \cdot \ln\left(\frac{8}{8,3}\right) = 1,053 \cdot 10^{-2} \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

On remarque que l'entropie créée par les frottements est faible vis-à-vis de l'entropie créée par irréversibilité thermique dans le premier modèle

**Conclusion**

On peut se demander quel était le modèle attendu par l'examinateur. Vu la brièveté de l'énoncé, il est certain qu'il ne s'était pas posé toutes ces questions ! Il reste à espérer que les correcteurs admettront les deux présentations. D'un point de vue plus pédagogique, cela nous aura permis de discuter sur le second principe, qui reste un des aspects les plus

délicats de la thermodynamique.

### Seconde présentation

5.b

Les relations :  $P.v^k = Cste$  et  $P.v = r.T$  entraînent  $T^k/P^{k-1} = Cste$   
d'où :

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\ln T_f/T_i}{\ln P_f/P_i}$$

soit :

$$k = 1 / \left[ 1 - \frac{\ln T_f/T_i}{\ln P_f/P_i} \right]$$

en notant (i) et (f) les indices des pressions et températures initiales et finales.

A.N.:

compresseur :  $k_c = 1,4693$

échangeur :  $k_e = 0,0449$

turbine :  $k_t = 1,3212$

5.c

### Rappel théorique

Reprenons sous forme différentielle l'expression du premier principe appliqué aux écoulements permanents :

$$dh = w_i - q_e \quad (\text{on suppose toujours } de_c = de_p = 0)$$

Or la différentielle de l'enthalpie d'un fluide s'écrit :

$$dh = v dP + T ds$$

En introduisant une "chaleur de frottement"  $q_f = 0$  associée à un travail de frottement  $w_f = q_f = 0$ , et si **la seule source d'irréversibilité est le frottement mécanique**, alors on peut écrire le second principe sous la forme :

$$T ds = q_e - q_f$$

De ces trois relations on déduit facilement :

$$q_f = w_i - v dP$$

En intégrant sur toute l'évolution étudiée, on trouve :

$$q_f = w_i - \int_i^f v dP$$

Le travail massique indiqué  $w_i$  a déjà été calculé.

Dans l'échangeur, on a justifié  $w_i = 0$ . Dans le compresseur et la turbine adiabatiques, on a trouvé :

$$w_i = h - c_p (T_f - T_i) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_f - T_i)$$

Il reste à évaluer l'intégrale :

$$\int_i^f v dP$$

appelée **travail de transvasement massique**, qui dépend du chemin suivi. (ce n'est pas une différentielle exacte !).

C'est là que l'hypothèse (*assez arbitraire*) de l'évolution polytropique est nécessaire. On trouve :

$$v = K.P^{1/k} \text{ avec } K = v_i.P_i^{1/k} = v_f.P_f^{1/k} = \text{Cste}$$

$$\int_i^f v dP = K \int_i^f P^{-1/k} dP = \frac{k}{k-1} P_f v_f - P_i v_i = \frac{k.r}{k-1} (T_f - T_i)$$

On en déduit :

échangeur :  $q_f = \frac{k_e.r}{k_e-1} (T_3 - T_2) = \frac{0,049 \cdot 0,286}{0,951} (1260 - 576) = 9,20 \text{ kJ.kg}^{-1}$

compresseur adiabatique :  $q_f = \left[ \frac{1}{k_c-1} - \frac{k_c}{k_c-1} \right] r \cdot (T_2 - T_1) = 29,59 \text{ kJ.kg}^{-1}$

turbine adiabatique :  $q_f = \left[ \frac{1}{k_t-1} - \frac{k_t}{k_t-1} \right] r \cdot (T_4 - T_3) = 88,19 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Dans l'échangeur, la relation :  $q_f = \int_i^f v dP = 0$

impose que la pression baisse s'il y a frottement. On retrouve la notion de **perte de charge** évoquée dans la première présentation. On a effectivement :  $P_3 - P_2 = 0,3 \text{ bar}$ .

Une autre façon d'obtenir ces résultats serait d'utiliser les capacités calorifiques "vraies" introduites dans la première partie et jamais utilisées.

On rappelle les résultats :

$$T ds = c dT - q_e + q_f \text{ avec } c = c_v \frac{k}{k-1}$$

qui s'intègrent facilement en :

$$q_e - q_f = c (T_f - T_i) ; \quad s = c \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Applications numériques ( $q$  en  $\text{kJ.kg}^{-1}$ ;  $c$  et  $s$  en  $\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  :

compresseur :  $c_c = 0,10457\dots$ ;  $q_e = 0$  ;  $q_f = 29,59$  ;  $s = 0,07068$

échangeur :  $c_e = 1,01345\dots$ ;  $q_e = 684$  ;  $q_f = 9,20$  ;  $s = 0,7933$

turbine :  $c_t = 0,17638\dots$ ;  $q_e = 0$  ;  $q_f = 88,19$  ;  $s = 0,0892$

### Questions 6 et 7 - Etude de la compression et de la détente

Les sous-questions étant identiques, et pour mieux faire apparaître les analogies et les différences nous traiterons ces deux questions parallèlement plutôt que séquentiellement.

#### a) Travail indiqué polytropique

Considérons une compression (ou une détente) polytropique réversible non adiabatique d'un gaz parfait.

On a déjà établi :

$$dh = w_i - q_e + v.dP = T.ds$$

$$q_f = 0 - q_e = T.ds$$

$$w_i = v.dP$$

$$w_{ik} = \int_i^f v.dP = \frac{k.r}{k-1} (T_f - T_i)$$

Le travail indiqué polytropique s'identifie dans ce cas au travail de transvasement. On obtient respectivement :

compresseur :  $w_{ikc} = \frac{k_c.r}{k_c-1} (T_2 - T_1)$

turbine :  $w_{ikt} = \frac{k_t}{k_t-1} (T_4 - T_3)$

#### b) Travail indiqué de compression (ou de détente) de la transformation adiabatique

réelle.

D'après les questions 4.a et 4.b :

$$\begin{aligned}
 w_i &= h \cdot c_p \cdot T \cdot \frac{r}{1} \cdot T_f \cdot T_i \\
 \text{compresseur} &: w_{ic} = \frac{r}{1} \cdot T_2 \cdot T_1 \\
 \text{turbine} &: w_{it} = \frac{r}{1} \cdot T_4 \cdot T_3
 \end{aligned}$$

### c) Rendement indiqué polytropique

Attention, le rapport définissant ce rendement est pris dans un sens ou dans l'autre selon que l'on considère la compression ou la détente. En effet, la compression réelle nécessite plus de travail que la compression idéale alors que la détente réelle restitue moins de travail que la détente idéale.

$$\begin{aligned}
 \eta_{ikc} &= \frac{w_{ikc}}{w_{ic}} \left[ \frac{k_c}{k_c - 1} \right] / \left[ \frac{r}{1} \right] \\
 \eta_{ikt} &= \frac{w_{ikt}}{w_{it}} \left[ \frac{r}{1} \right] / \left[ \frac{k_t}{k_t - 1} \right]
 \end{aligned}$$

### d) Relation avec la chaleur de frottement

Dans le rappel théorique du 5.b on a établi :

$$q_f = w_i \int_i^f v dP \quad \text{soit :} \quad q_f = w_i \cdot w_{ik}$$

Avec  $q_f \geq 0$  (toujours) ;  $w_{ic} = w_{ikc} \geq 0$  (compression) ou  $w_{ikt} = w_{it} \geq 0$  (détente). On peut contrôler numériquement ces relations à l'aide des résultats obtenus.

Ces inégalités et les expressions obtenues permettent d'obtenir les inégalités importantes :

$$k_c \geq k_t$$

e) En remplaçant par les valeurs calculées, on obtient :

$$w_{ikc} = 253.41 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad \text{et} \quad w_{ikt} = 588.19 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

On en déduit que  $w_{ic} = 283 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $w_{it} = 500 \text{ kJ.kg}^{-1}$ , puis :

$$\eta_{ikc} = 0,895 \quad \text{et} \quad \eta_{ikt} = 0,850$$