Câble coaxial

Câble en régime continu

Hypothèses générales

Nous considérons un cable coaxial constitué de deux conducteurs cylindriques creux de rayons respectifs a et b, séparés par un isolant de permittivité diélectrique ε. Dans une première approximation, nous négligerons la résistivité des conducteurs et la conductivité de l'isolant. Le conducteur extérieur est mis à la terre, son potentiel est donc toujours nul.

Le conducteur intérieur transporte un courant d'intensité I sous un potentiel V. Ce courant est utilisé par une charge résistive placée à l'extrémité du câble. On a bien sûr l'égalité $V = R \times I$. Le courant "revient" vers la source au travers du conducteur extérieur. Les conducteurs étant creux et minces, le courant est de nature surfacique.

Le câble étant rectiligne et long, on négligera dans les calculs les effets de bords (symétrie du cylindre infini)

Détermination du champ électromagnétique

Justifier que les conducteurs sont forcément chargés en surface. On notera σ_a et σ_b les densités respectives.

A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique dans l'isolant (orientation et intensité)

En déduire l'expression du potentiel électrique dans l'isolant. Sachant que $V(a) = V$ exprimer les champs $E(r)$ et $V(r)$, ainsi que les densités σ_a et $\sigma_b$en fonction de V et de la géométrie.

En déduire la capacité par unité de longueur du câble, notée Γ.

A l'aide du théorème d'Ampère, exprimer le champ magnétique dans l'isolant (orientation et intensité) en fonction du courant I. En déduire son flux "dans l'isolant" pour un tronçon de câble de longeur H. Il s'agit du flux au travers d'une section rectangulaire : $a < r < b\,; \Delta z = H$. En déduire la self par unité de longueur notée Λ.

A l'aide des résultats précédents, exprimer le vecteur de Poynting Π dans l'isolant puis son flux au travers de la section (annulaire) de l'isolant. Commenter le résultat.

Câble en régime variable

Le câble est maintenant soumis à une tension et à un courant variables au cours du temps et le long du câble.

Modèle en cellules

On modélise le câble par des cellules de longueur élémentaire dz, caractérisées par une self série $dL = \Lambda \times dz$, et une capacité en parallèle $dC = \Gamma \times dz$.

Exprimer la chute de tension -δVà la traversée de la self et la perte de courant $-\delta I$ dans la capacité. En déduire des équations aux dérivées partielles couplées en $I(z,t)$ et $V(z,t)$. Par dérivation, l'équation de propagation à laquelle satisfait l'une ou l'autre de ces deux variables conjuguées Exprimer la vitesse de phase des signaux.

Onde sinusoïdale progressive

On étudie un signal de tension du type :

$$V(z,t) = V_0 \cos(\omega t - kz)$$

La pulsation ω est imposé par la source (générateur BF) , le "vecteur d'onde" k dépend alors du milieu

Exprimer ce vecteur. Exprimer le courant associé, montrez qu'il est de la forme

$$I(z,t) = I_0 \cos(\omega t - kz)$$

En déduire l'expression de l'impédance caractéristique de la ligne Z_c.

Elle est ici purement résistive, mais c'est un cas particulier du au fait que le câble soit sans pertes.

Pour que cette solution soit acceptable totalement, il faut que l'impédance placée en bout de ligne soit ”adaptée” c’est-à-dire que sa valeur soit justement égale à Z_c

En passant au formalisme complexe, on peut imaginer de placer en bout de ligne une impédance de charge quelconque Z_f, non adaptée.

La solution progressive n’est donc plus satisfaisante. On retrouve une solution satisfaisante en ajoutant un signal ”réfléchi” renvoyé par la charge d’expression :

$$V_r(z,t) = r \times V_0 \cos(\omega t + kz + \varphi_r)$$

$$I_r(z,t) = -r \times I_0 \cos(\omega t + kz + \varphi_r)$$

Le signe - au niveau du courant est du au fait que le courant réfléchi se propage selon les z décroissants. Si l’on exprime algébriquement le courant total sous la forme $I(z,t) + I_r(z,t)$ ce signe - est nécessaire. *Cette façon algébrique de travailler est la plus sûre, surtout lorsque plus tard on devra utiliser le même formalisme pour sommer des champs vectoriels associés à des ondes incidentes et réfléchies.*

Ce résultat s’exprime mieux en formalisme complexe :

$$V_r(z,t) = (r \times \exp(i\varphi_r)) \times V_0 \exp j(\omega t + kz + \varphi_r) = \underline{r} \times V_0 \cos(\omega t + kz)$$

$$I_r(z,t) = -\underline{r} \times I_0 \cos(\omega t + kz)$$

Explicitez le facteur de réflexion complexe en fonction des impédances Z_c et Z_f.On considérera pour simplifier les calculs que la charge est placée en $z = 0$.

Etudier les cas particuliers $Z_f = 0$ (court-circuit) et $1/Z_f = 0$ (circuit ouvert).

Montrez que dans ces deux cas un système simple d’ondes stationnaires s’établit sur le câble.

Réponses

Régime continu

Dans l’isolant ($a < r < b$) on a :

$$E_r(r) = \frac{\sigma_a}{\varepsilon} \times \frac{a}{r}$$

$$dV = -E_r \times dr \rightarrow V(r) = \frac{\sigma_a \times a}{\varepsilon} \ln(\frac{b}{r})$$

$$V(a) = V \rightarrow \frac{\sigma_a \times a}{\varepsilon} = \frac{V}{\ln(b/a)}$$

$$\rightarrow V(r) = V \times \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \; ; \; E_r(r) = \frac{V}{\ln(b/a)} \times \frac{1}{r}$$

On trouve facilement la capacité d’un tronçon de longueur H

$$Q = \sigma_a \times 2\pi a H = \frac{2\pi\varepsilon H \times V}{\ln(b/a)}$$

$$\Gamma = \frac{C}{H} = \frac{Q}{V \times H} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (F.m^{-1})$$

Champ magnétique et self linéique :

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I H}{2\pi} \ln(b/a)$$

$$\Lambda = \frac{L}{H} = \frac{\Phi}{IH} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a) \; ; \; (H.m^{-1})$$

Vecteur de Poynting et flux :

$$\Pi = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rightarrow \Pi_z = \frac{V}{\ln(b/a)} \times \frac{1}{r} \times \frac{I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_a^b \Pi_z \times 2\pi r dr = V \times I$$

On a retrouvé la puissance transporté par le câble (et consommée par la charge en bout de ligne)

Régime variable - modèle en cellules

$$\delta V = -(\Lambda dz)\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\delta I = -(\Gamma dz)\frac{\partial V}{\partial t}$$

Or

$$\frac{\delta V}{dz} = \frac{\partial}{\partial z}V(z,t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta I}{dz} = \frac{\partial}{\partial z}I(z,t) \rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\Lambda\frac{\partial I}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = -\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

On reconnaît l'équation de propagation. La vitesse de phase des signaux vaut :

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{c}{n}$$

Avec n indice du milieu :

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Où ε_r est appelé permittivité relative du milieu. Le fait que ce coefficient dépend en général de la fréquence de l'onde caractérise la **dispersivité** du milieu

Onde sinusoïdale progressive

Le vecteur d'onde se déduit de l'expression :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$$

Les amplitudes sont liées par :

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

Si l'impédance finale n'est pas adaptée, on a un signal réfléchi, avec :

$$V_t = V + V_r \; ; \; I_t = I + I_r \qquad \text{et} \qquad \frac{V_t}{I_t} = Z_f$$

$$\rightarrow \underline{r} = \frac{Z_f - Z_c}{Z_f + Z_c}$$

$Z_f = 0 \rightarrow r = -1$: réflexion avec changement de signe pour V

$1/Z_f = 0 \rightarrow r = +1$: réflexion sans changement de signe pour V

Le système d'onde stationnaire comporte un noeud de tension et un ventre de courant sur le court-circuit. Inversément il présente un noeud de courant et un ventre de tension sur le circuit ouvert.

$$Z_f = 0 \rightarrow V_t = 2V_0\sin(\omega t)\sin(kz)\,; I_t = 2I_o\cos(\omega t)\cos(kz)$$

$$1/Z_f = 0 \rightarrow V_t = 2V_0\cos(\omega t)\cos(kz); I_t = 2I_o\sin(\omega t)\sin(kz)$$